

L'ORIGINE DELLA QUANTIZZAZIONE NELL'UNIVERSO

di Leonardo **Rubino**

Giugno 2011

Indice:

-Indice.	Pag.1
-Capitolo 1: Quantizzazione ed Indeterminazione direttamente dall'Universo.	Pag.2
Par. 1.1: Concetti introduttivi.	Pag.2
Par. 1.2: L'Equazione di Planck/Einstein e la comparsa del concetto di quantizzazione.	Pag.3
-Capitolo 2: La nascita della Fisica Quantistica.	Pag.3
Par. 2.1: L'Effetto Fotoelettronico e il cammino verso la quantizzazione.	Pag.3
Par. 2.2: Lo Spettro di Emissione del Corpo Nero di Planck.	Pag.5
Par. 2.3: La Legge di Stefan-Boltzmann.	Pag.13
Par. 2.4: La Legge di Wien.	Pag.15
Par. 2.5: L'Effetto Compton.	Pag.15
-Capitolo 3: Una trattazione più formale della Meccanica Quantistica.	Pag.17
Par. 3.1: Equazione di Schrödinger (deduzione formale).	Pag.17
Par. 3.2: Le Relazioni di Indeterminazione di Heisenberg (deduzione formale).	Pag.22
-Bibliografia.	Pag.25

Capitolo 1: Quantizzazione ed Indeterminazione direttamente dall'Universo.

Par. 1.1: Concetti introduttivi.

*Se il mondo esistesse da sempre, allora ciò che sta avvenendo adesso sarebbe dovuto già avvenire.
A. SCHOPENHAUER.*

Se un evento, dopo aver avuto a disposizione un tempo infinito, ancora non è avvenuto, allora evidentemente è perché non potrà avvenire mai.

In fisica, il concetto di tempo infinito è privo di senso. L'infinito è un oggetto che si può solo nominare ed a cui si può associare un simbolo, ma lo stesso non è ovviamente né immaginabile, né realmente maneggiabile.

In matematica si parla di tendenza ad infinito; tendenza e basta. L'Universo non può esistere da sempre; e, allora, prima che c'era? Beh, non è che non c'è risposta; è mal posta la domanda. Il tempo nasce con l'Universo, dunque il concetto di "prima dell'Universo" è contraddittorio. C'è da quando c'è e basta. Anzi, c'è e basta. E' invece più proficuo il comprendere come effettivamente esso possa "comparire" senza violare le leggi di conservazione e della fisica in generale.

Beh, certo che se la materia mostra attrazione reciproca in forma di gravità, allora siamo in un Universo armonico oscillante in fase di contrazione, che si sta contraendo tutto verso un punto comune che è il centro di massa di tutto l'Universo. Infatti, l'accelerare verso il centro di massa ed il mostrare proprietà attrattive gravitazionali sono due facce della stessa medaglia. Inoltre, tutta la materia intorno a noi mostra di voler collassare: se ho una penna in mano e la lascio, essa cade, dimostrandomi che vuole collassare; poi, la Luna vuole collassare nella Terra, la Terra vuole collassare nel Sole, il Sole nel centro della Via Lattea, la Via Lattea nel centro del suo ammasso e così via, e, dunque, anche tutto l'Universo collassa. No?

Ma allora come si spiegherebbe che vediamo la materia lontana, intorno a noi, allontanarsi e non avvicinarsi? Beh, facile: se tre paracadutisti si lanciano in successione da una certa quota, tutti e tre stanno cadendo verso il centro della Terra, dove poi idealmente si incontreranno, ma il secondo paracadutista, cioè quello che sta in mezzo, se guarda in avanti, vede il primo che si allontana da lui, in quanto ha una velocità maggiore, poiché si è buttato prima, mentre se guarda indietro verso il terzo, vede anche questi allontanarsi, in quanto il secondo, che sta facendo tali rilevamenti, si è lanciato prima del terzo, e dunque ha una velocità maggiore e si allontana dunque pure da lui. Allora, pur convergendo tutti, in accelerazione, verso un punto comune, si vedono tutti allontanarsi reciprocamente. Hubble era un po' come il secondo paracadutista che fa qui i rilevamenti. Ricordo poi che recenti misurazioni su supernove lontane tipo Ia, su altre galassie, utilizzate come candele standard, hanno dimostrato che l'Universo sta effettivamente accelerando, fatto questo che è contro la teoria della nostra presunta attuale espansione post Big Bang, in quanto, dopo che l'effetto di una esplosione è cessato, le schegge proiettate si propagano, sì, in espansione, ma devono farlo ovviamente non accelerando.

A tale scenario, ogni tanto oppongono l'obiezione secondo cui per due paracadutisti perfettamente paralleli, ossia uno di fianco all'altro, l'allontanamento non ci sarebbe. Beh, questa è una situazione limite che è la classica eccezione che conferma la regola. Nella Legge di Hubble per l'Universo in espansione, invece, le eccezioni manco si contano.

Tuttavia, non esistendo, il mondo, da sempre, la materia che collassa non può provenire dalla lontananza dell'infinito; dunque, evidentemente, centinaia di miliardi di anni fa fu in espansione (post Big Bang), in senso opposto a quello di collassamento attuale, e dunque a gravità repulsiva. L'Universo è dunque ciclico, e dunque ha una frequenza di ciclo ed è

questa la chiave per capire come mai esso è quantizzato! Tutte le frequenze che esistono nell'Universo devono dunque essere, direttamente od indirettamente, multiple della sua, che è la più piccola frequenza esistente.

Par. 1.2: L'Equazione di Planck/Einstein e la comparsa del concetto di quantizzazione.

L'Equazione di Planck/Einstein $E = h\nu$ (ed $E_T = nh\nu$, in caso di n fotoni), che ci dice che l'energia di un fotone è pari a ν (frequenza) volte il pacchetto di energia h (Costante di Planck); essa è considerata, in un certo senso, come la madre della fisica quantistica, dei pacchetti di energia ecc. Questa speciale costante, nel secolo scorso, comparì con l'Equazione di Planck/Einstein, principalmente tramite due fenomenologie distinte: una, l'Effetto Fotoelettronico, studiato principalmente da Einstein e l'altro, ossia lo studio dello Spettro di Emissione del Corpo Nero, studiato principalmente da Planck. Diciamo che, nell'opinione di chi scrive, sia Einstein che Planck non intuirono a priori la loro equazione e la quantizzazione, ma furono costretti dalle circostanze a supporle al solo fine di far combaciare la teoria con i risultati degli esperimenti!

Poi, dal momento che il quanto non è nullo, ma ha una sua consistenza, sicuramente nell'opinione di chi scrive, anche nella determinazione dei valori delle grandezze fisiche, le incertezze non possono essere nulle (Principio di Indeterminazione di Heisenberg, Equazione di Schrödinger ecc). Se osservi una particella per valutarne la posizione, devi interferire con essa, seppur con il più piccolo quanto di energia, e dunque la "tocchi", dunque la sposti un po', e dunque modifichi ciò che ti stai proponendo di valutare.

Anche in campo termodinamico, dove la fisica quantistica regna, se io cerco di far raggiungere, ad esempio ad un liquido in un calorimetro, lo zero assoluto, vi infilo all'interno un termometro e comincio a raffreddare a più non posso, tramite un frigorifero, ma in qualsiasi momento decido di controllare se sono giunto allo zero assoluto, nell'opinione di chi scrive, devo guardare il termometro, dunque illuminarlo, seppur anche solo con il più piccolo quanto di energia luminosa, e dunque lo scaldo e lo stesso trasmette un po' di calore al liquido e dunque allo zero assoluto non ci sarò mai comunque.

Analizziamo entrambe le fenomenologie sopra accennate: l'Effetto Fotoelettronico e lo studio dello Spettro di Emissione del Corpo Nero.

Capitolo 2: La nascita della Fisica Quantistica.

Par. 2.1: L'Effetto Fotoelettronico e il cammino verso la quantizzazione.

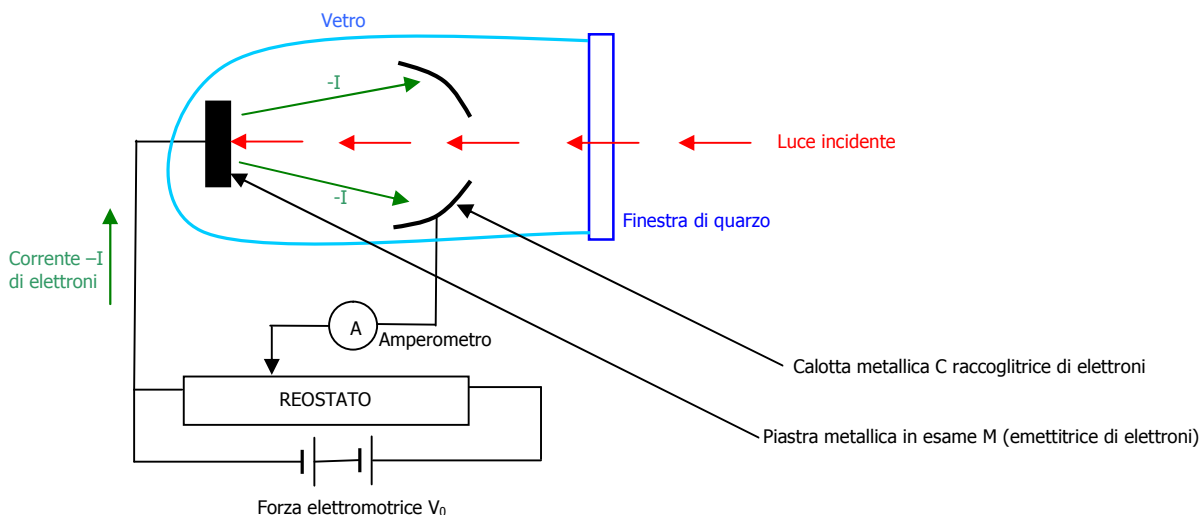


Fig. 2.1: Dispositivo per l'effetto fotoelettronico.

La tensione tra calotta C e piastra M sia: $\Delta V = V_C - V_M$ e sia I la corrente misurata dall'amperometro. Sia poi I_∞ la corrente di saturazione, ossia la corrente massima ottenibile per un dato flusso di luce Φ .

Si ha sperimentalmente che:

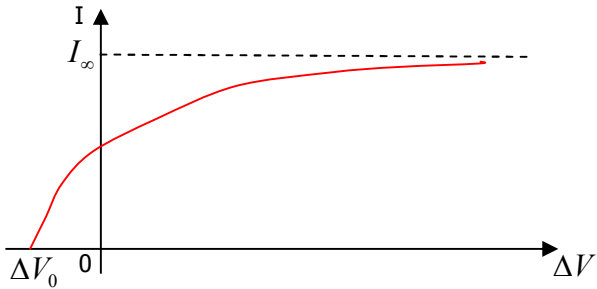


Fig. 2.2: Grafico tensione-corrente.

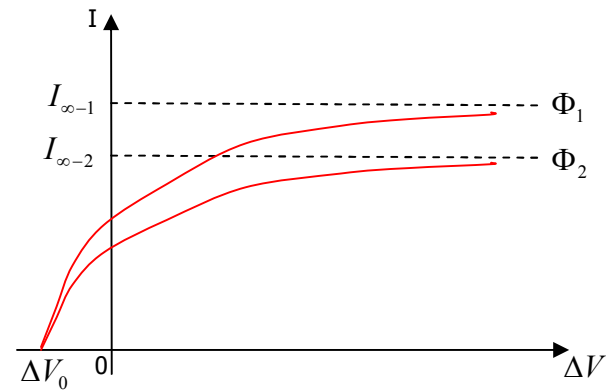


Fig. 2.3: Grafico tensione-corrente per flussi di luce Φ diversi.

La luce incidente fa saltare fuori degli elettroni dalla piastra M, che vengono poi raccolti dalla calotta metallica, ed anche accelerati, eventualmente, da una differenza di potenziale.

Si ha che gli elettroni vengono emessi con una energia cinetica E_K che può essere misurata applicando una $\Delta V = \Delta V_0$ (potenziale d'arresto) inversa tale che la corrente di elettroni emanati anche con $\Delta V = 0$ venga annullata; quando ciò avviene, evidentemente si ha che: $-e\Delta V_0 = E_K$.

Si nota sperimentalmente che $\Delta V_0 \neq f(\Phi)$, ossia ΔV_0 non dipende da Φ , ma dipende invece dalla frequenza ν della luce incidente.

Ciò è in totale disaccordo con la fisica classica.

E si rileva dunque sperimentalmente quanto in Fig. 2.4:

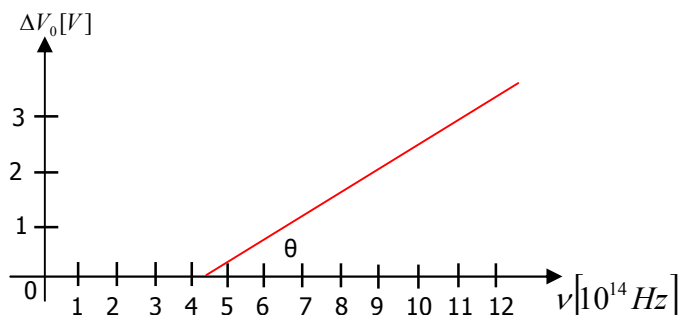


Fig. 2.4: Potenziale d'arresto-frequenza della radiazione incidente.

$tg\theta$ è fisso e vale sempre: $tg\theta = h/e$. L'equazione di questa retta, nota anche come Relazione di Einstein, è ovviamente:

$E_K = -e\Delta V_0 = h\nu - L_e = \frac{1}{2}m_e V^2$, con L_e che è il lavoro di estrazione necessario per

l'elettrone, $h\nu$ è l'energia apportata dal fotone all'elettrone e $E_K = \frac{1}{2}m_e V^2$ è l'energia cinetica con cui emerge l'elettrone.

La grossa novità qui è la relazione $E = h\nu$ (relazione di Planck/Einstein) con cui la luce porta energia: essa dipende dalla frequenza e secondo una costante di proporzionalità pari ad $h = 6,625 \cdot 10^{-34} Js$ (costante di Planck).

Par. 2.2: Lo Spettro di Emissione del Corpo Nero di Planck.

premesse sulla Legge di Distribuzione di Boltzmann:

cercheremo di capire come varia, in un materiale, il numero di molecole per unità di volume al variare dell'energia.

Supponiamo di avere una colonna di gas a temperatura costante posto in un recipiente e sotto l'effetto del campo gravitazionale.

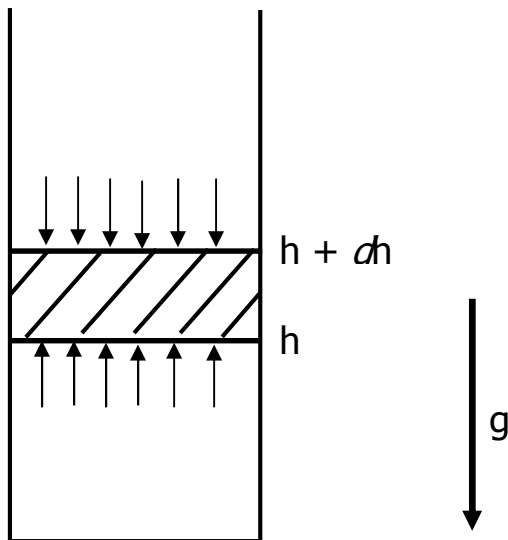


Fig. 2.5: Colonna di gas.

Se il nostro recipiente ha un volume V e contiene N particelle di gas, si definisca n come il numero di particelle per unità di volume.

Con riferimento alla figura sopra, si consideri una sezione S della colonna di gas alla generica altezza h . La pressione P_h all'altezza h è ovviamente superiore a quella all'altezza $h+dh$, poiché ad h la quantità di gas che grava verso il basso è maggiore.

Essendo la pressione P definita come $dF/dS = (\text{peso del disco alto } dh \text{ e di sezione } S) / S$, si ha:

$$P_{h+dh} - P_h = dP = \frac{-m \cdot n \cdot S \cdot dh \cdot g}{S} = -mgndh, \quad (2.1)$$

dove m è la massa di ogni singola particella di gas, n è il numero di particelle per unità di volume, $S dh$ è il volume del disco considerato, g è l'accelerazione di gravità ed il segno $-$ testimonia il fatto che dP è negativo (P diminuisce salendo).

Sappiamo anche dalla termodinamica che :

$$PV = n_{kmoli}RT = n_{kmoli}N_A \cdot \frac{R}{N_A}T = N \cdot k \cdot T, \quad (2.2)$$

dove la prima eguaglianza è la legge di stato dei gas perfetti ($R=cost$), N_A è il numero di particelle contenute in una kilomole, cioè il Numero di Avogadro, $N = n_{kmoli} N_A$ è il numero totale di particelle del gas in esame (evidentemente costituito da n_{kmoli}) e $k=R/N_A$ è la costante di Boltzmann.

Per la dimostrazione dell'Eq. di stato dei gas perfetti si consulti un qualsiasi testo di Fisica Generale, oppure il link: <http://vixra.org/pdf/1201.0001v1.pdf>

Dalla precedente equazione si ricava che:

$$P = \frac{N}{V} kT = nkT.$$

Differenziando quest'ultima relazione, si ottiene:

$$dP = dnkT \quad (2.3)$$

Combinando la (2.1) con la (2.3), si ottiene:

$$\frac{dn}{n} = -\frac{mg}{kT} dh = -\frac{dE_p}{kT},$$

dove $dE_p = mgdh$ è il differenziale dell'energia potenziale posseduta da ciascuna particella.

L'integrazione di questa equazione differenziale dà banalmente il seguente risultato:

$$n = n_0 e^{-E_p / kT}, \quad (2.4)$$

dove n_0 è costante.

Nel caso in cui le particelle siano soggette non al campo gravitazionale, ma ad una qualsiasi altra forza conservativa F_i (ad esempio le forze intermolecolari stesse), che supporremo diretta verso la direzione x , nella (2.4), in luogo dell'energia potenziale E_p , si avrà la corrispondente energia potenziale E_i derivante dalla forza F_i , cioè:

$$E_i = -\int F_i \cdot dx.$$

In definitiva:

$$n = n_0 e^{-E_i / kT} \quad (2.5)$$

Il caso di azione di forze non conservative non lo prendiamo neanche in considerazione, poiché, in tal caso, non sarebbe neppure possibile pretendere l'equilibrio termico.

Per noi, l'equazione di Boltzmann (2.5) può ritenersi dimostrata e vogliamo ricordare ciò che tale equazione esprime:

la probabilità di trovare molecole in una data disposizione spaziale varia esponenzialmente con l'opposto dell'energia potenziale di quella disposizione, diviso per kT .

premesse sull'oscillatore armonico lineare:

Consideriamo una massa fissata all'estremo di una molla; l'altro estremo della molla sia fisso ad una parete.

Quando la massa inizia ad oscillare, ricordando che $F=ma$ e che, per Hooke $F=-kx$, si potrà scrivere la seguente equazione differenziale:

$$ma + kx = m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0, \text{ la cui soluzione è:}$$

$$x = x_0 \sin(\omega t + \theta), \quad (2.6)$$

$$\text{con } \omega = \sqrt{k/m}.$$

Scriviamo ora l'espressione per l'energia totale E (pari all'energia cinetica più quella potenziale elastica) di questa massa che oscilla:

$$\frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} kx^2 = E = E_k + E_p \quad (2.7)$$

ciò perché:

$$E_p = -\int F \cdot dx = \int kx \cdot dx = \frac{1}{2} kx^2.$$

Sostituendo la (2.6) nella (2.7), e tenendo conto dell'espressione per ω , si ottiene:

$$\begin{aligned} E &= \frac{m}{2} \omega^2 x_0^2 \cos^2(\omega t + \theta) + \frac{1}{2} kx_0^2 \sin^2(\omega t + \theta) = \\ &= \frac{1}{2} kx_0^2 [\cos^2(\omega t + \theta) + \sin^2(\omega t + \theta)] = \frac{1}{2} kx_0^2 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Risultando dall'espressione precedente che le componenti cinetica e potenziale sono identiche, abbiamo giustificato l'attribuzione di due componenti identiche pari a $(1/2)kT$ per l'energia totale degli oscillatori della cavità di un corpo nero.

premesse sulle onde stazionarie:

Se un'onda S_1 si propaga in un mezzo limitato, la sovrapposizione di essa con la sua riflessa S_2 dà origine ad un'onda stazionaria S :

$$S_1 = A \sin(kx - \omega t), \quad S_2 = A \sin(kx + \omega t).$$

La differenza di segno negli argomenti testimonia il fatto che le onde si propagano ognuna in senso opposto all'altra; inoltre, il termine $\omega t = 2\pi\nu t$ ci dice che, fissato un punto x , si ha oscillazione nel tempo, mentre il termine kx ci dice che, fissato un istante t , si nota un'oscillazione muovendosi lungo x .

Un'onda che si propaga, dunque, oscilla nel tempo e lungo la direzione di propagazione.

$$S = S_1 + S_2 = 2A \cdot \sin kx \cdot \cos \omega t = 2A \cdot \sin \frac{2\pi}{\lambda} x \cdot \cos 2\pi\nu t \quad (2.9)$$

ciò dopo aver ricordato l'identità trigonometrica seguente:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cos \frac{(\alpha - \beta)}{2} \cdot \sin \frac{(\alpha + \beta)}{2}.$$

lo Spettro di Emissione del Corpo Nero di Planck:

consideriamo una cavità le cui pareti si trovino alla temperatura T uniforme e costante. Le cariche microscopiche costituenti le pareti si muovono in virtù dell'agitazione termica, e, così facendo, irradiano onde elettromagnetiche che vanno riempiendo la cavità; si trasferisce così energia dalle pareti al campo elettromagnetico. Le onde elettromagnetiche, a loro volta, muovendosi internamente alla cavità, urtano contro le pareti; si trasferisce così energia dal campo alle pareti. Si raggiunge quindi un equilibrio.

Si chiama **Spettro della Radiazione di Corpo Nero** la funzione $f(\nu)$ tale che $f(\nu)d\nu$ indica la quantità di *energia* posseduta dal campo elettromagnetico contenuto nell'unità di *volume* della cavità, e avente frequenza compresa tra ν e $\nu + d\nu$, ossia:

$$f(\nu)d\nu = du \quad [J / m^3]$$

Le pareti della cavità che emettono ed assorbono radiazione possono essere considerate come composte da piccoli dipoli oscillanti. Inoltre, possiamo osservare che alla radiazione contenuta nella cavità dobbiamo assegnare due gradi di libertà corrispondenti ai due piani di polarizzazione perpendicolari e tra loro indipendenti su cui ogni onda elettromagnetica può oscillare; in parole più semplici, un'onda elettromagnetica che si propaga lungo z può oscillare trasversalmente sia sul piano zx che su quello zy .

Sappiamo poi dalla teoria cinetica dei gas che ad ogni particella, e quindi ad ogni onda emessa da questa, e per ogni grado di libertà, va attribuita un'energia pari a due volte la quantità $\frac{1}{2}kT$, cioè kT , poiché l'energia totale si compone di una parte cinetica e di una potenziale tra loro mediamente identiche (vedi la (2.8)).

Per la dimostrazione del fatto che l'energia totale da attribuire sia proprio kT /grado di libertà, si vada al link: <http://vixra.org/pdf/1201.0001v1.pdf>

Supponiamo ora di avere, per semplicità, una cavità cubica, con la radiazione elettromagnetica che si propaga lungo i tre assi, dando luogo ad onde stazionarie; consideriamo inoltre solo un piano di polarizzazione per asse di propagazione (y), tenendo successivamente conto dell'effettiva esistenza di due gradi di libertà in seguito.

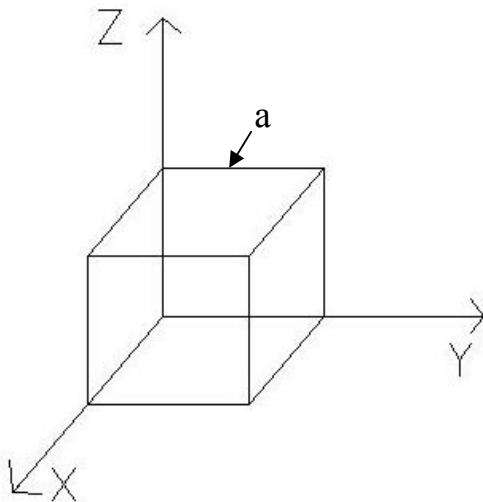


Fig. 2.6.

Essendo la cavità sede di onde stazionarie, e considerando l'asse x come asse di propagazione, si potrà esprimere la seguente equazione di un'onda stazionaria (vedi la (2.9)):

$$E_y(x, t) = E_{oy} \sin(kx) \cdot \sin(2\pi\nu t), \text{ con } k \text{ numero d'onda} = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ e } \lambda \text{ lunghezza d'onda.}$$

Si ricorda che, banalmente: $c = \lambda\nu$, e: $\omega = 2\pi/T = 2\pi\nu$.

Dovendosi l'onda stazionaria annullare in $x = 0$ ed in $x = a$, si avrà:

$$ka = n\pi \rightarrow n = 2a / \lambda \rightarrow \nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{c \cdot n}{2a} \cdot$$

n è positivo, e non nullo, altrimenti non si ha onda.

In generale, per un'onda che si propaga lungo una direzione qualsiasi, si avrà, in componenti:

$$E_y(x, t) = E_{oy} \sin(k_x x) \cdot \sin(2\pi \nu t)$$

$$k_x = (2\pi / \lambda) \cdot \cos \alpha$$

$$E_z(y, t) = E_{oz} \sin(k_y y) \cdot \sin(2\pi \nu t)$$

$$k_y = (2\pi / \lambda) \cdot \cos \beta$$

$$E_x(z, t) = E_{ox} \sin(k_z z) \cdot \sin(2\pi \nu t)$$

$$k_z = (2\pi / \lambda) \cdot \cos \gamma$$

dove i tre coseni sono i "coseni direttori", cioè le componenti del versore \hat{k} che individua la direzione di propagazione dell'onda.

Sempre per analogia con il caso monodimensionale, si ha:

$$k_x a = n_x \pi \quad \rightarrow (2a / \lambda) \cos \alpha = n_x$$

$$k_y a = n_y \pi \quad \rightarrow (2a / \lambda) \cos \beta = n_y$$

$$k_z a = n_z \pi \quad \rightarrow (2a / \lambda) \cos \gamma = n_z$$

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = (2a / \lambda)^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) = 4a^2 / \lambda^2,$$

da cui :

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{2a} \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} \quad (2.10)$$

Al variare di tali n , si hanno tutti i possibili modi di vibrazione.

Ponendo tali valori di n_x, n_y, n_z su tre assi cartesiani, e considerando l'esempio di $n_x, n_y, n_z = (1, 2, 2)$, si noterà che il numero di vibrazioni possibili cui corrispondono terne n_x, n_y, n_z ($n_x, n_y, n_z \neq 0$, pena l'averne un caso degenere) sono i vertici del grafico seguente in cui gli n sono appunto diversi da zero, e cioè tutti i puntini rossi.

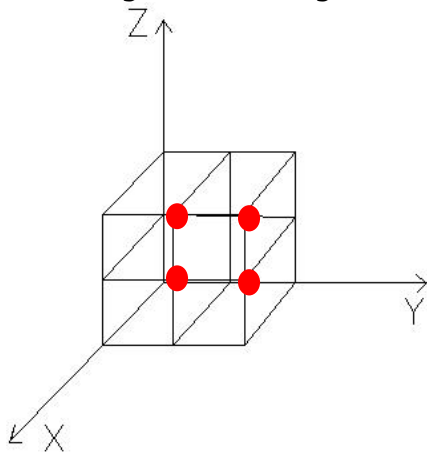


Fig. 2.7.

La cosa fondamentale che bisogna ora notare, e che ha validità generale, è che *tali modi di vibrazione possibili* (●) *corrispondono in numero ai cubetti di lato unitario (anch'essi 4). Quindi: **n . di modi di vibraz . possibili = volume totale V individuato dalla terna*** n_x, n_y, n_z .

La radice nell'espressione (2.10) altro non è che il valore di un raggio di un ottante di sfera individuato dalle tre componenti n_x, n_y, n_z (si considera ovviamente solo l'ottante dove n_x, n_y, n_z sono positivi, poiché, questi, positivi e non nulli devono essere).

Tale ultima considerazione ci suggerisce di passare un momento alle più pratiche coordinate polari:

essendo il volume di un ottante di sfera pari a $\frac{1}{8} \frac{4}{3} \pi \cdot r^3$, il numero N di modi di vibrazione possibili per un valore di r compreso tra 0 ed r è:

$N = \frac{1}{8} \frac{4}{3} \pi \cdot r^3$. Ne consegue che il numero $N(r) dr$ di modi di vibrazione possibili per un

valore di r compreso tra r ed $r + dr$ è ottenibile differenziando l'espressione precedente:

$N(r)dr = \frac{\pi}{2} r^2 dr$. Si definisca ora un $N(\nu)$ tale che $N(r)dr = N(\nu)d\nu =$ numero di

modi di vibrazione possibili per frequenze comprese tra ν e $\nu + d\nu$; osservando che, per la (2.10) $\nu = r c / (2 a)$, e, differenziando quest'ultima, si ha:

$d\nu = \frac{c}{2a} dr$; si ottiene dunque:

$N(\nu)d\nu = \frac{\pi}{2} \left(\frac{2a}{c} \right)^3 \nu^2 d\nu = \frac{4\pi}{c^3} V \nu^2 d\nu$, con $V = a^3 =$ volume della cavità.

Per passare dalla precedente relazione all'espressione di $f(\nu)$, ricordando la definizione della stessa $f(\nu)$ data in precedenza, si dovrà:

- dividere per V per riferirci all'unità di volume
- moltiplicare per due per tenere conto dei due possibili stati di polarizzazione della radiazione (come ci riserveremo di fare quando tratteremo il corpo nero)
- moltiplicare per kT , cioè per l'energia media associata a ciascun grado di libertà.

In definitiva:

$$f(\nu)d\nu = \frac{8\pi}{c^3} kT \nu^2 d\nu \quad , \quad (2.11)$$

nota come formula di Rayleigh-Jeans.

Ovviamente:

$$f(\nu) = \frac{8\pi}{c^3} kT \nu^2$$

Il grafico di questa equazione è qui sotto riportato.

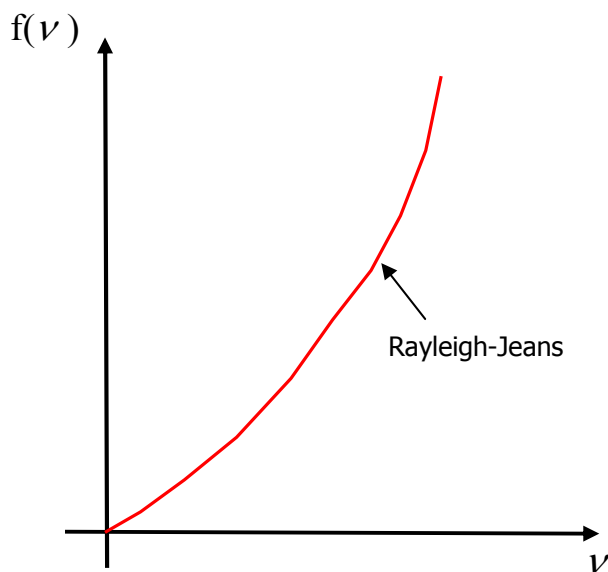


Fig. 2.8: Grafico alla Rayleigh-Jeans.

Sperimentalmente, però, si osserva un altro comportamento, e cioè il seguente:

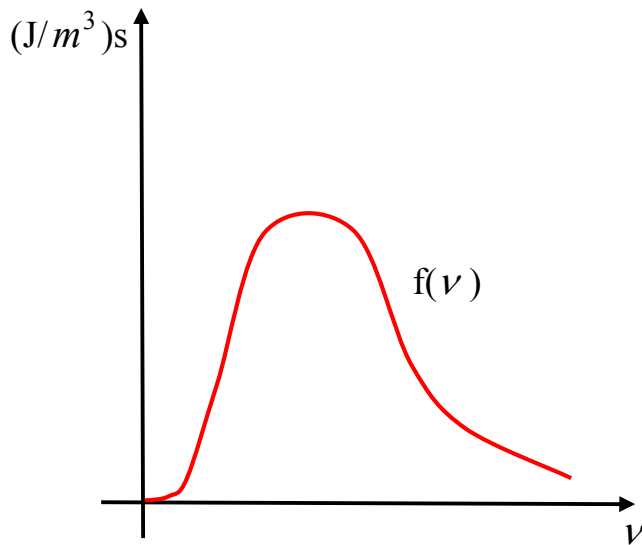


Fig. 2.9: Emissione reale.

Nella realtà, quindi, si ha un picco, cioè un valore di frequenza intorno al quale l'emissione del corpo nero si concentra.

Ovviamente, la curva qui sopra vale per una fissata temperatura T , e, come vedremo, all'aumentare di T il picco si ha per valori di frequenza più alti.

Ecco, ad esempio, perché un pezzo di ferro a temperatura ambiente emette radiazione elettromagnetica nel campo degli infrarossi, o giù di lì, mentre, man mano che lo si scalda, arriva ad emettere, per temperature di alcune centinaia di gradi, nel campo del visibile (calor rosso, calor bianco).

Analogamente, si riescono a determinare molte caratteristiche della superficie di una stella analizzando lo spettro di frequenza della "luce" che la stessa ci invia.

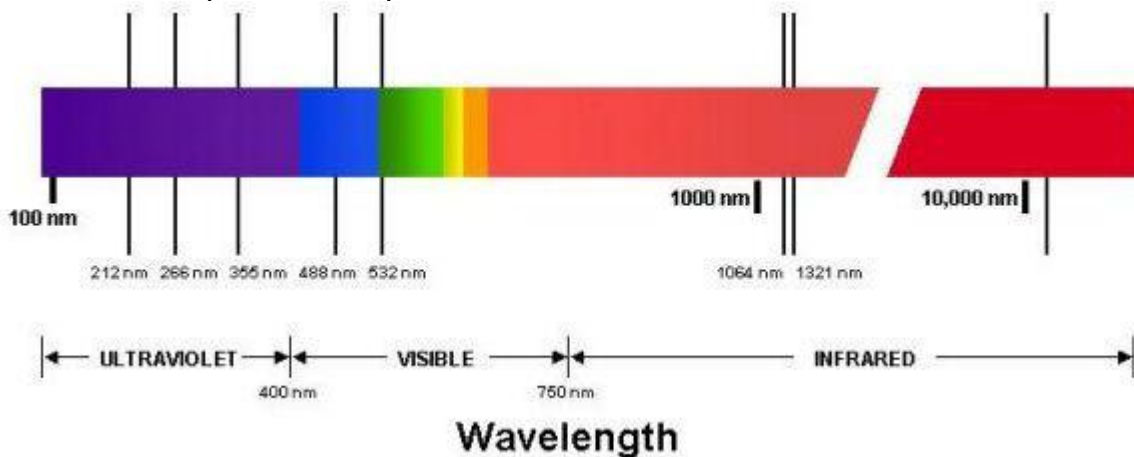


Fig. 2.10: Spettro della radiazione elettromagnetica.

Nulla di simile è invece confermato dal grafico alla Rayleigh-Jeans, che presuppone una catastrofe ultravioletta. Ciò segnò l'inizio della crisi della fisica classica, e ci fu la necessità di apportare idee ed ipotesi di carattere quantistico per far combaciare le deduzioni teoriche con la realtà; un esempio è la supposizione che Max Planck fece e che noi ora riportiamo.

Osserviamo innanzitutto che, se vogliamo stabilire l'energia media \bar{E} tra tutte le energie dei costituenti di un dato sistema, possiamo effettuare una media pesata di tutte le energie, che sono distribuite secondo la già dimostrata formula di Boltzmann (2.5) per $n(E)$; dunque:

$$\bar{E} = \frac{\sum E_i \cdot n(E_i)}{\sum n(E_i)} = \frac{\sum E_i \cdot n_0 e^{-E_i/kT}}{\sum n_0 e^{-E_i/kT}} = \frac{\sum E_i \cdot e^{-E_i/kT}}{\sum e^{-E_i/kT}} ; \quad (2.12)$$

il numeratore è la somma di tutte le energie, ognuna delle quali pesata secondo il numero di costituenti che la possiedono, mentre il denominatore è il numero totale di particelle. Al momento, tale media fornirebbe il valore kT , che è proprio il valore di energia che noi abbiamo attribuito ad ogni costituente.

Con l'unico fine di passare dalla formula di Rayleigh-Jeans ad una formula il cui grafico fosse quello sperimentale del corpo nero, sopra riportato, Planck suppose che per ogni valore di frequenza ν , l'energia del sistema potesse assumere solo valori discreti (quantizzati !):

$$E = h\nu, 2h\nu, \dots, nh\nu \quad , \quad (n \text{ intero}). \quad [\text{Eq. ne di Planck/Einstein}]$$

Con tale assunzione, la (2.12) diviene (sommatoria in n):

$$\bar{E} = \frac{\sum_0^{\infty} nh\nu \cdot e^{-nh\nu/kT}}{\sum_0^{\infty} e^{-nh\nu/kT}} .$$

Il risultato è:

$$\bar{E} = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}; \quad \text{infatti, ponendo } \frac{h\nu}{kT} = z, \quad \text{si ha: } \bar{E} = kT \frac{\sum_0^{\infty} nz \cdot e^{-nz}}{\sum_0^{\infty} e^{-nz}}; \quad \text{definendo:}$$

$$f(z) = \sum_0^{\infty} e^{-nz}, \quad \text{si ha: } -z \cdot df/dz = z \sum_0^{\infty} n \cdot e^{-nz} = \sum_0^{\infty} nz \cdot e^{-nz}, \quad \text{dunque:}$$

$$\bar{E} = -kTz \frac{df/dz}{f} = -kTz \frac{d}{dz} \ln z = -kTz \frac{d}{dz} \ln \sum_0^{\infty} e^{-nz}. \quad \text{Avendosi ora, per gli sviluppi di Taylor,}$$

oppure per lo studio delle serie geometriche, che: $\sum_0^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, e ponendo: $e^{-z} = x$, si

$$\text{ha: } \bar{E} = -kTz \frac{d}{dz} \ln(1 - e^{-z})^{-1} = -kTz \frac{1}{(1 - e^{-z})^{-1}} (1 - e^{-z})^{-2} e^{-z} = kTz \frac{e^{-z}}{1 - e^{-z}} = \frac{kTz}{e^z - 1} = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

cioè l'asserto, dopo aver ricordato l'espressione di z .

La novità di Planck, dunque, è stata quella di porre nella eq. di Rayleigh-Jeans (2.11), in luogo dell'energia media per componente, cioè kT , il valore trovato di \bar{E} , quindi:

$$f(\nu)d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} d\nu \quad (2.13)$$

cioè, proprio l'equazione di Planck.

Dividendo entrambi i membri per dv , si ottiene l'espressione per $f(v)$ che descrive eccellentemente il grafico sperimentale sopra riportato sull'emissione del corpo nero!

Par. 2.3: La Legge di Stefan-Boltzmann.

Avevamo definito il corpo nero come una cavità. Ora, pratichiamo un forellino per far uscire dalla cavità della radiazione (u [J/m^3]), come in figura:

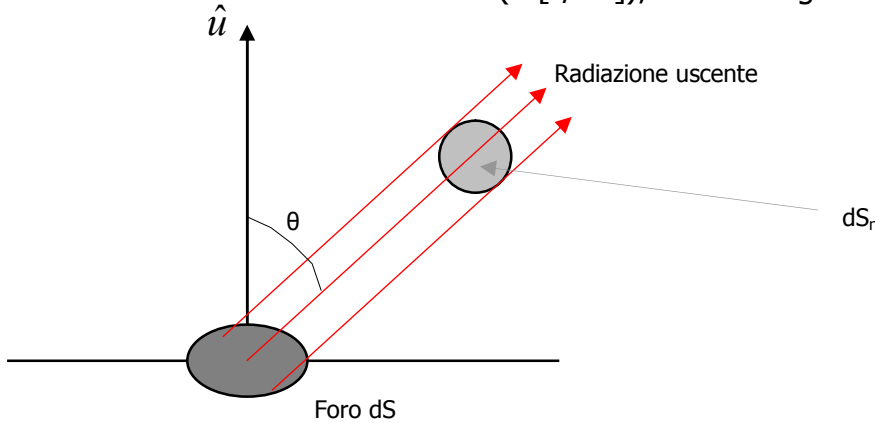


Fig. 2.11: Foro e radiazione uscente.

Avevamo poi visto, con la (2.11) che si aveva:

$$f(v)dv = \frac{8\pi}{c^3} kT v^2 dv \quad [J/m^3] \quad (2.14)$$

Introducendo ora la potenza W [$J/s=W$] e l'angolo solido Ω [sr], si ha banalmente, riguardo dS_n :

$$\left(\frac{d^2W}{d\Omega dv}\right)d\Omega dv = du \cdot c \cdot dS_n \frac{d\Omega}{4\pi} \quad [W] \text{ (potenza nell'intervallo } dv \text{ e } d\Omega.) \quad (2.15)$$

in quanto tali watt su dS_n sono dati dalla du [J/m^3], che emerge dal foro, per c , che è la velocità della radiazione uscente, che li porta a [$Jm/(m^3s)$]= [W/m^2], poi ancora per i metri quadri di dS_n (ed abbiamo i watt), ma il tutto ancora per la frazione di angolo solido (frazione adimensionale) $\frac{d\Omega}{4\pi}$ sotto cui è vista dS_n .

Ricordando ora che $dS_n = dS \cos \theta$ e $du = f(v)dv$, la (2.15) diventa:

$$\left(\frac{d^2W}{d\Omega dv}\right)d\Omega dv = f(v)dv \cdot c \cdot dS \cos \theta \frac{d\Omega}{4\pi} \quad [W]$$

Introducendo ora l'intensità della radiazione, cioè I [W/m^2], si ha ovviamente che:

$$\left(\frac{d^2I}{d\Omega dv}\right)d\Omega dv = \frac{1}{dS} \left(\frac{d^2W}{d\Omega dv}\right)d\Omega dv = \frac{cf(v)}{4\pi} \cos \theta \cdot d\Omega dv \quad [W/m^2]$$

(la legge del coseno che è emersa è la Legge del Coseno di Lambert).

Ricordando ora che si può esprimere un angolo solido in funzione degli angoli delle coordinate polari nel seguente modo: $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$, si ha ancora:

$$\left(\frac{d^2I}{d\Omega dv}\right)d\Omega dv = \frac{1}{dS} \left(\frac{d^2W}{d\Omega dv}\right)d\Omega dv = \frac{cf(v)}{4\pi} \cos \theta \cdot d\Omega dv = \frac{cf(v)}{4\pi} \cos \theta \cdot \sin \theta \cdot d\theta d\varphi dv \quad [W/m^2]$$

Integrando ora quest'ultima su $d\Omega$, ossia su $d\theta d\varphi$ (θ tra 0 e π) (φ tra 0 e π), e tenendo conto che:

$\int_0^\pi \cos \theta \sin \theta d\theta = 2 \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta = 2(1/2) = 1$, mentre l'integrale su φ vale ovviamente π , si ha, in totale:

$$\iint_{\theta-\varphi} \left(\frac{d^2 I}{d\Omega dv} \right) d\Omega dv = \left(\frac{dI}{dv} \right) dv = dI = \frac{cf(v)}{4\pi} \cdot 1 \cdot \pi \cdot dv = \frac{cf(v)}{4} dv$$

ma essendo $\frac{dI}{dv} = \varepsilon(v)$ [$W/(Hz \cdot m^2)$] = [J/m^2], si avrà che:

$$\varepsilon(v)dv = \left(\frac{c}{4} \right) f(v)dv \quad [W/m^2] \quad (2.16)$$

Tenendo ora conto della (2.14) e della seguente scontata: $v = c/\lambda$, si ha:

$$\varepsilon(v)dv = \left(\frac{c}{4} \right) f(v)dv = \left(\frac{c}{4} \right) \frac{8\pi}{c^3} kT v^2 \cdot dv = \frac{2\pi}{c^2} v^2 kT dv$$

Differenziando ora la $v = c/\lambda$, si ha, banalmente: $dv = c \cdot d\lambda/\lambda^2$ e definendo $f(\lambda)$ ed $\varepsilon(\lambda)$ come segue (ovviamente):

$$f(\lambda)d\lambda = f(v)dv$$

$$\varepsilon(\lambda)d\lambda = \varepsilon(v)dv$$

si avrà:

$$f(\lambda)d\lambda = f(v) \frac{dv}{d\lambda} d\lambda = \frac{8\pi}{c^3} kT v^2 \cdot \frac{dv}{d\lambda} d\lambda = \frac{8\pi}{c^3} kT v^2 \cdot \frac{c}{\lambda^2} d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4} kT \cdot d\lambda \quad (2.17)$$

$$\varepsilon(\lambda)d\lambda = \varepsilon(v) \frac{dv}{d\lambda} d\lambda = \frac{2\pi}{c^2} v^2 kT \frac{dv}{d\lambda} d\lambda = \frac{2\pi}{c^2} v^2 kT \frac{c}{\lambda^2} d\lambda = \frac{2\pi c}{\lambda^4} kT \cdot d\lambda \quad (2.18)$$

Se ora, proprio come facemmo nella (2.11) per ottenere la (2.13), nelle (2.17) e (2.18) poniamo al posto di kT l'espressione: $\frac{hv}{e^{hv/kT} - 1}$, si avranno le seguenti versioni dell'Equazione di Planck:

$$f(v)dv = \frac{8\pi v^2}{c^3} \frac{hv}{e^{hv/kT} - 1} dv \quad [J/m^3] \quad (2.19)$$

$$f(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/kT\lambda} - 1} d\lambda \quad [J/m^3] \quad (2.20)$$

$$\varepsilon(v)dv = \frac{2\pi v^2}{c^2} \frac{hv}{e^{hv/kT} - 1} dv \quad [W/m^2] \quad (2.21)$$

$$\varepsilon(\lambda)d\lambda = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/kT\lambda} - 1} d\lambda \quad [W/m^2] \quad (2.22)$$

Integrando poi la (2.21), si ottiene:

$$\varepsilon = \frac{2\pi h}{c^2} \int_0^\infty \frac{v^3}{e^{hv/kT} - 1} dv = \frac{2\pi h}{c^2} \int_0^\infty \frac{e^{-hv/kT} v^3}{1 - e^{-hv/kT}} dv = \frac{2\pi h}{c^2} \int_0^\infty [v^3 e^{-hv/kT} \sum_0^\infty (e^{-hv/kT})^n] dv = \frac{2\pi h}{c^2} \sum_1^\infty \int_0^\infty v^3 e^{-n(hv/kT)} dv$$

Ponendo ora: $b = \frac{h}{kT}$ ed $a = \frac{2\pi h}{c^2}$, si ha ancora:

$$\varepsilon = a \sum_1^\infty \left(-\frac{d^3}{d(bn)^3} \right) \int_0^\infty e^{-bnv} dv = a \sum_1^\infty \left(-\frac{d^3}{d(bn)^3} \right) \left(\frac{1}{bn} \right) = \frac{6a}{b^4} \sum_1^\infty \frac{1}{n^4} = \frac{6a}{b^4} \frac{\pi^4}{90} = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3} T^4 = \boxed{\sigma T^4} = \varepsilon$$

[W/m^2] (Legge di Stefan-Boltzmann)

con $\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3} = 5,670 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$ (Costante di Stefan-Boltzmann)

Per verificare che la sommatoria $\sum_1^\infty \frac{1}{n^4}$ dà come risultato un numero pari a $\frac{\pi^4}{90}$ è sufficiente anche provare a sommare i primi termini della serie stessa.

Par. 2.4: La Legge di Wien.

Dalla (2.22) si ha: $\varepsilon(\lambda) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/kT\lambda} - 1}$; con riferimento anche alla figura 2.9, che qui riportiamo:

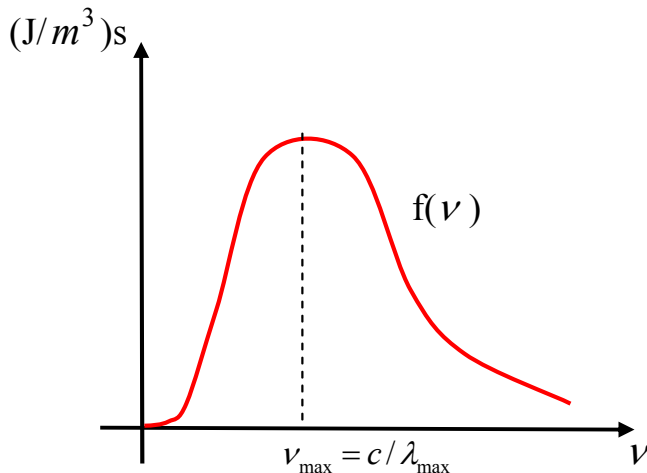


Fig. 2.12: Il massimo di frequenza.

volendo capire con quale λ_{\max} avviene l'emissione, per l'analisi matematica poniamo $\frac{d\varepsilon(\lambda)}{d\lambda} = 0$, cioè annulliamo la derivate prima, da cui:

$$5\lambda^4 (e^{hc/kT\lambda} - 1) + \lambda^5 e^{hc/kT\lambda} \left(-\frac{hc}{kT\lambda^2}\right) = 0, \text{ da cui: } 5\lambda e^{hc/kT\lambda} - 5\lambda - \frac{hc}{kT} e^{hc/kT\lambda} = 0, \text{ da cui ancora:}$$

$$\frac{(e^{hc/kT\lambda} - 1)}{e^{hc/kT\lambda}} = 1 - e^{-hc/kT\lambda} = \frac{hc}{5kT\lambda}; \text{ questa equazione trascendente, risolta numericamente, ma,}$$

volendo, anche graficamente, fornisce: $\frac{hc}{kT\lambda} = 4,965$, da cui:

$$\lambda_{\max} = \frac{C}{T} = \frac{hc}{k \cdot 4,965 T} = \frac{0,2897 \cdot 10^{-2}}{T} = \lambda_{\max} [m] \quad (\text{Legge di Wien}) \quad (2.23)$$

e $C = 0,2897 \cdot 10^{-2} [K \cdot m]$ è la Costante di Wien.

Par. 2.5: L'Effetto Compton.

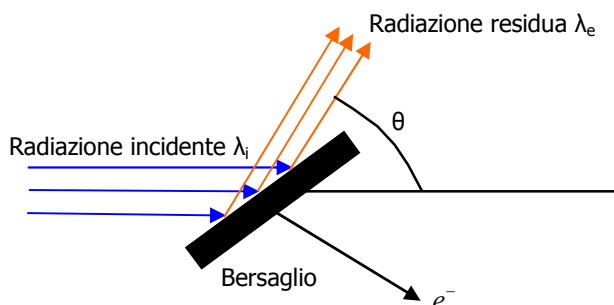


Fig. 2.13: L'Effetto Compton.

Siamo in un caso analogo a quello dell'Effetto Fotoelettronico; qui, però, la radiazione incidente sul bersaglio ha lunghezza d'onda λ_i molto piccola, pari a qualche frazione di Å. Parliamo dunque di fotoni molto energetici.

Gli elettroni partiranno con un certo angolo θ' , ma si osserverà anche una radiazione residua a λ_e . Essendo questo un urto molto energetico, tanto che l'energia cinetica dell'elettrone sarà poi paragonabile a quella sua di riposo $m_e c^2$, lo stesso sarà assimilabile a quello di un fotone contro elettrone libero, dunque come se quest'ultimo non fosse vincolato al nucleo. E si dovrà comunque ricorrere alle formule relativistiche.

Tale fenomeno, ovviamente, non è interpretabile nell'ambito della fisica classica.

Dimostriamo ora che: $\lambda_e = \lambda_i + \lambda_c(1 - \cos\theta)$ (2.24)

$\lambda_c = \frac{h}{m_e c} = 0,025 \text{ \AA}$ è la lunghezza d'onda Compton.

Riportiamo le composizioni vettoriali delle quantità di moto in gioco:

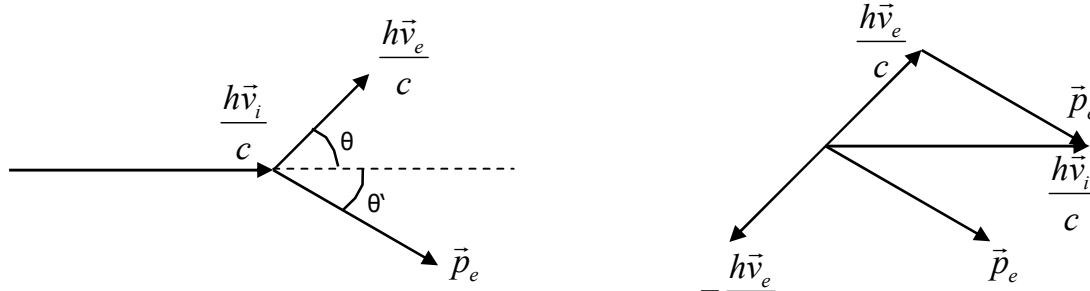


Fig. 2.14: Composizioni vettoriali nell'Effetto Compton. c

Si ha che $\vec{p}_e = \frac{h\vec{\nu}_i}{c} - \frac{h\vec{\nu}_e}{c}$, da cui, moltiplicando scalarmente m.a.m. con la stessa

equazione: $\vec{p}_e \cdot \vec{p}_e = \frac{h\vec{\nu}_i}{c} \cdot \frac{h\vec{\nu}_i}{c} + \frac{h\vec{\nu}_e}{c} \cdot \frac{h\vec{\nu}_e}{c} - 2 \frac{h\vec{\nu}_i}{c} \cdot \frac{h\vec{\nu}_e}{c}$, ossia:

$$p_e^2 = \left(\frac{h\nu_i}{c}\right)^2 + \left(\frac{h\nu_e}{c}\right)^2 - 2 \frac{h\nu_i}{c} \frac{h\nu_e}{c} \cos\theta \quad (2.25)$$

Inoltre, per la conservazione dell'energia:

$$E_0 + h\nu_i = E + h\nu_e \quad (2.26)$$

$$\text{Ora, per le grandezze a riposo si ha: } E_0 = m_e c^2, \quad (2.27)$$

$\vec{p}_0 = 0$, mentre per quelle dinamiche, si ha:

$$E = \frac{m_e c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma m_e c^2 \quad \text{e} \quad (2.28)$$

$$\vec{p}_e = \frac{m_e \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma m_e \vec{v} \quad (2.29)$$

e si ha poi, dalla relatività e dalle due eq. precedenti, che:

$$c^2 \vec{p}_e^2 - E^2 = -m_e c^4 \quad (2.30)$$

Moltiplichiamo ora la (2.25) per c^2 e nella (2.26) isoliamo E e poi quadriamo, ottenendo:

$$c^2 p_e^2 = (h\nu_i)^2 + (h\nu_e)^2 - 2h^2 \nu_i \nu_e \cos\theta$$

$$E^2 = (E_0 + h\nu_i - h\nu_e)^2 = m_e c^4 + (h\nu_i)^2 + (h\nu_e)^2 + 2m_e c^2 (h\nu_i - h\nu_e) - 2h\nu_i h\nu_e$$

sottraendo ora m.a.m. queste due e ricordando la (2.30),

$$h\nu_e - h\nu_i = \frac{h^2 \nu_i \nu_e}{m_e c^2} (1 - \cos \theta) \quad (2.31)$$

e moltiplicando ora per $\frac{c}{\nu_i \nu_e} (= \frac{\lambda_e}{\nu_i} = \frac{\lambda_i}{\nu_e})$, si ottiene: $\lambda_i - \lambda_e = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta)$ e la (2.24) è

così dimostrata.

Calcoliamo ora θ' :

proiettiamo l'equazione (già introdotta) $\frac{h\vec{\nu}_i}{c} = \frac{h\vec{\nu}_e}{c} + \vec{p}_e$ sugli assi; si ottiene:

$$0 = \frac{h\nu_e}{c} \sin \theta + p_e \sin \theta' \quad \text{e} \quad \frac{h\nu_i}{c} = \frac{h\nu_e}{c} \cos \theta + p_e \cos \theta' \quad \text{ovvero:}$$

$$-\frac{h\nu_e}{c} \sin \theta = p_e \sin \theta' \quad \text{e} \quad \frac{h\nu_i}{c} - \frac{h\nu_e}{c} \cos \theta = p_e \cos \theta'$$

e dividendo m.a.m., si ha: $tg \theta' = \frac{\nu_e \sin \theta}{\nu_i - \nu_e \cos \theta} = \frac{\sin \theta}{\frac{\nu_i}{\nu_e} - \cos \theta}$, ma per la (2.31):

$$\frac{\nu_i}{\nu_e} = 1 + \frac{h\nu_i}{m_e c^2} (1 - \cos \theta), \quad \text{da cui, finalmente:} \quad tg \theta' = \frac{\sin \theta}{(1 + \frac{h\nu_i}{m_e c^2})(1 - \cos \theta)} = \frac{\cot(\theta/2)}{(1 + \frac{h\nu_i}{m_e c^2})}$$

Capitolo 3: Una trattazione più formale della Meccanica Quantistica.

Par. 3.1: Equazione di Schrödinger (deduzione formale).

Ricordiamo l'equazione di Planck/Einstein:

$$E = h\nu \quad (3.1)$$

e ricordiamo poi anche la ovvia relazione matematica tra la pulsazione (velocità angolare) ω e la frequenza ν :

$$\omega = 2\pi\nu \quad (3.2)$$

Abbiamo poi l'energia di una particella:

$$E = m_0 c^2 = \vec{p} \cdot \vec{c} \quad (3.3)$$

e poi la quantità di moto:

$$\vec{p} = m_0 \vec{c} \quad (3.4)$$

e poi ancora le relazioni generiche $c = \lambda\nu$ (velocità uguale lunghezza d'onda per frequenza)

$|\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$ (modulo del vettore d'onda $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \hat{k}$) e $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ (costante di Dirac – \hbar segnata).

Ora, dalle (3.1) e (3.3), scaturisce che: $p = h \frac{\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2\pi} \frac{2\pi}{\lambda} = \hbar k$ (3.5)

Inoltre: $E = h\nu = \frac{h}{2\pi} 2\pi\nu = \hbar\omega$. (3.6)

e, per una particella, $E = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2m} m^2 v^2 = \frac{p^2}{2m}$ (3.7)

e $E = \hbar\omega = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$. (3.8)

Ora, visto che per localizzare una particella devo interferire con essa, illuminandola o comunque perturbandola in qualche modo e visto che, detto con semplicità, più una

particella è piccola e più questa interazione la disturba, la sposta, la devia, la rallenta, l'accelera ecc, viene spontaneo non immaginarla più come un singolo puntino imperturbabile, ma bensì con un'onda.

Con De Broglie, possiamo associare ad una particella una lunghezza d'onda, e ciò traendo spunto dalla (3.5):

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mV}, \text{ dove ora } V \text{ è la velocità della particella e } p \text{ è il modulo di } \vec{p} = m_0\vec{V}.$$

Per quanto appena detto, viene altresì spontaneo introdurre una funzione d'onda $\Psi = \Psi(\vec{r}, t) = \Psi(\vec{x}, t)$ che descriva la particella in moto lungo $\vec{r}(x, y, z)$ (od $\vec{x}(x, y, z)$).

funzione d'onda:

per quanto precedentemente detto, la particella non è più un puntino senza dimensioni, ma una sorta di nuvoletta che rappresenta lo spazio entro il quale è più probabile trovare la particella; indicando con $\rho(\vec{x}, t)d^3x$ la probabilità di trovare la particella nell'elemento di volume tra \vec{x} ed $\vec{x} + d^3x$ (d^3x perchè ragioniamo, qui, in tre dimensioni), essa deve essere proporzionale, secondo una costante di proporzionalità, al modulo quadro $|\Psi(\vec{x}, t)|^2$ della funzione d'onda $\Psi = \Psi(\vec{x}, t)$. Si parla qui di modulo quadro perché un'onda, in generale, posso esprimerla con funzioni trigonometriche, e dunque anche in forma complessa, cioè con numeri complessi, cui corrispondono quantità appunto quantificabili in campo reale quando ne prendo il modulo:

$$|\Psi(\vec{x}, t)|^2 d^3x = |N|^2 \rho(\vec{x}, t) d^3x \quad (|\Psi(\vec{x}, t)|^2 = \Psi(\vec{x}, t)\Psi^*(\vec{x}, t)) \text{ , dove } \Psi^*(\vec{x}, t) \text{ è la complessa coniugata di } \Psi(\vec{x}, t) \text{ , (i scambiato con } -i).$$

Ψ è caratteristica di ogni singolo elettrone. Ora, per la definizione stessa di probabilità, l'integrazione su tutto lo spazio deve fornire la probabilità massima:

$$\int \rho(\vec{x}, t) d^3x = 1, \text{ da cui: } \int |\Psi(\vec{x}, t)|^2 d^3x = |N|^2$$

Normalizziamo dunque la funzione Ψ in modo tale che $\int |\Psi(\vec{x}, t)|^2 d^3x = 1$, da cui:

$$\Psi_N(\vec{x}, t) = \frac{1}{N} \Psi(\vec{x}, t)$$

Elenchiamo ora alcune caratteristiche cui deve sottostare Ψ :

-deve essere continua, in quanto la probabilità di trovare la particella, ad esempio, in x_0 deve essere la stessa, comunque si tenda ad x_0 , che sia da destra o da sinistra.

-deve essere ovunque limitata, così come lo è la probabilità di trovare la particella in un determinato luogo.

-per una particella localizzata in una regione Ω , si deve avere $\Psi = 0$ per $x \notin \Omega$.

-deve essere funzione monodroma (cioè ad un sol valore)

-funzioni d'onda che differiscono solo per la normalizzazione descrivono lo stesso sistema fisico (e $\Psi = 0 \rightarrow$ Vuoto)

-se un sistema può stare in uno stato Ψ_1 ed anche in uno stato Ψ_2 , allora può stare anche in un generico stato $\Psi = \alpha\Psi_1 + \beta\Psi_2$.

funzione d'onda di una particella libera:

sappiamo dalla fisica delle onde che, ovviamente, un'onda che si propaga nel tempo e lungo x, deve avere come argomento una funzione del tipo:

$\frac{2\pi}{\lambda} \hat{k} \cdot \vec{x} - \frac{2\pi}{\lambda} vt = \vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t$, in quanto se fissiamo un punto nel tempo (es.: t=0) si ha una variabilità con x e fissando x si ha una variabilità nel tempo, dunque proprio un'onda.

Ora, per le (3.5) e (3.6) si ha: $\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t = \frac{\vec{p}}{\hbar} \vec{x} - \frac{E}{\hbar} t$ e dunque la funzione d'onda deve essere del tipo:

$$f(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t) = f\left(\frac{\vec{p}}{\hbar} \vec{x} - \frac{E}{\hbar} t\right) \quad (3.9)$$

Notiamo ora che derivare la (3.9) rispetto a t significa fattorizzare ω , mentre derivarla rispetto ad x significa fattorizzare k.

Ora, essendo per la (3.8): $\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$, si intuisce, per quanto appena detto, che dovremo considerare come equazione delle onde un'equazione del primo ordine rispetto a t e del secondo rispetto ad x:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \gamma \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}. \quad (3.10)$$

Adesso, Fourier ci suggerirebbe di proporre come funzioni di base candidate ad essere soluzioni della (3.10) le seguenti quattro:

$$A \sin(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t) \quad (3.11)$$

$$B \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t) \quad (3.12)$$

$$C e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \quad (3.13)$$

$$D e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \quad (3.14)$$

Notiamo dunque che le (3.11) e (3.12), in forma monodimensionale (x in luogo di \vec{x} ecc), non possono soddisfare la (3.10), mentre le (3.13) e (3.14) sì, a patto di considerare:

$-i\omega = -\gamma k^2$, da cui: $\gamma = i \frac{\omega}{k^2} = i\hbar \frac{\hbar\omega}{\hbar^2 k^2} = i\hbar \frac{E}{p^2} = \frac{i\hbar}{2m}$ e notiamo che γ è qui indipendente da quantità dinamiche come p, dunque ci va bene.

Se invece avessimo scelto l'Equazione delle Onde $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial^2 t} = \gamma \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}$ (non ok), tutte e quattro le candidate l'avrebbero soddisfatta, ma per γ si sarebbe avuto:

$$\gamma = \frac{\omega^2}{k^2} = \left(\frac{\hbar\omega}{\hbar k}\right)^2 = \frac{E^2}{p^2} = \frac{p^2}{4m^2}, \text{ non ok, in quanto un simile } \gamma \text{ sarebbe un parametro}$$

dinamico, contenendo p, e dunque l'equazione proposta avrebbe, come dire, visto cambiare la propria caratteristica con p.

Inseriamo allora la (3.13) nella nostra buona candidata (3.10), ottenendo:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}, \text{ ossia, moltiplicando entrambi i membri per } i\hbar:$$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \quad (3.15)$$

(Equazione di Schrödinger per una particella libera ed in moto unidimensionale)

Sostituendo ora l'espressione di $\Psi(x,t)$ (la (3.13) monodimensionale) nella (3.15), si ottiene:

$$\hbar\omega\Psi = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\Psi, \text{ cioè:}$$

$$E\Psi = \frac{p^2}{2m}\Psi \quad (3.16)$$

ed infatti già vedemmo che $E = \frac{p^2}{2m}$.

Ora, riscriviamo un attimo una sopra l'altra le (3.15) e (3.16):

$$i\hbar \frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}$$

$$E\Psi = \frac{p^2}{2m}\Psi$$

Da un confronto membro a membro, si nota che è possibile la seguente associazione di operatori:

$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ e $p^2 \rightarrow -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \gg p \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$. In tre dimensioni, la (3.15) diventa:

$$i\hbar \frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta\Psi, \quad (3.17)$$

che è l'Equazione di Schrödinger tridimensionale per una particella libera, dove

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ è il Laplaciano, poi $\Psi(\vec{x},t) = Ce^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$, $|\Psi(\vec{x},t)| = C$, $E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$,

$p^2 \rightarrow -\hbar^2 \Delta$, $p \rightarrow -i\hbar \nabla$, $\vec{p} = \hbar\vec{k}$, $\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$, con $k = |\vec{k}|$.

Si noti che la velocità dell'onda è $v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{E}{p} = \frac{p}{2m}$, cioè una velocità di fase, mentre la

velocità della particella è $v_g = \frac{p}{m} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk} \frac{\hbar k^2}{2m} = 2v_f$, e cioè una velocità di gruppo.

Essendo ora che nella (3.17) la quantità $-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta$ ha le dimensioni appunto di un'energia E,

e cinetica, nella fattispecie, visto che tale quantità abbiamo visto corrispondere a:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \rightarrow \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2m} m^2 v^2 = E_k, \quad (3.18)$$

se la particella si trova invece anche in un potenziale V, si avrà, in luogo della sola energia cinetica, l'energia totale $H=T+V=E_k+V$ (H è l'Hamiltoniana) e la (3.17) diverrà dunque:

$(\Psi(\vec{x},t) = Ce^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$, funzione d'onda e $\Psi^*(\vec{x},t) = Ce^{-i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$ è la complessa coniugata)

$$i\hbar \frac{\partial\Psi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V\right)\Psi$$

Equazione di Schrödinger completa!

(3.19)

Alternativamente, per la (3.18) qui sopra possiamo scrivere che:

$$E_k = \frac{p^2}{2m} = H - V = \frac{p^2}{2m}$$

(3.20)

nonchè:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi = (H - V)\Psi \quad (3.21)$$

ossia: $\Delta\Psi + \frac{2m}{\hbar^2}(H - V)\Psi = 0$ **Altra forma della Equazione di Schrödinger completa!** (3.22)

Riguardo le velocità di fase e di gruppo, per un fotone, che evidentemente è monocromatico e rispetta l'equazione delle onde, le due coincidono ($v_f = v_g = c$), e tutto ciò ci ricorda ancora una volta che l'Equazione di Schrödinger non è l'Equazione delle Onde di d'Alembert ed inoltre, per essa, si ha che $v_f \neq v_g$.

L'Equazione di Schrödinger sa dunque di onda "legata", stazionaria. Guarda caso. **Vuoi vedere che l'Equazione di Schrödinger, nella formulazione della (3.22), coincide con l'equazione delle onde stazionarie???**

Proviamo a vedere:

notiamo innanzitutto che la (3.22) ha proprio la forma dell'equazione delle onde stazionarie:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + k^2\Psi = 0; \text{ (equazione delle onde stazionarie)} \quad (3.23)$$

per semplicità, consideriamola un attimo la (3.22) in forma monodimensionale:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(H - V)\Psi = 0; \text{ beh, è proprio identica.}$$

La (3.23) è appunto l'equazione delle onde stazionarie; infatti, se un'onda generica Ψ_1 si propaga in un mezzo limitato, la sovrapposizione di essa con la sua riflessa Ψ_2 dà origine ad un'onda stazionaria $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$: $\Psi_1 = A \sin(kx - \omega t)$, $\Psi_2 = A \sin(kx + \omega t)$.

La differenza di segno negli argomenti testimonia il fatto che le onde si propagano ognuna in senso opposto all'altra; inoltre, il termine $\omega t = 2\pi\nu t$ ci dice che, fissato un punto x , si ha oscillazione nel tempo, mentre il termine kx ci dice che, fissato un istante t , si nota un'oscillazione muovendosi lungo x .

Ψ , dunque, oscilla nel tempo e lungo la direzione di propagazione.

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 = 2A \sin kx \cdot \cos \omega t = 2A \sin \frac{2\pi}{\lambda} x \cdot \cos 2\pi\nu t; \quad (3.24)$$

ciò dopo aver ricordato l'identità trigonometrica seguente:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cos \frac{(\alpha - \beta)}{2} \cdot \sin \frac{(\alpha + \beta)}{2}.$$

Ora, fissato t nella (3.24), si ha: $\Psi = \text{const} \cdot \sin kx$, da cui: $\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = -\text{const} \cdot k^2 \sin kx = -k^2\Psi$,

da cui ancora: $\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + k^2\Psi = 0$, e cioè la (3.23), ossia appunto l'equazione delle onde stazionarie!

Allora, come ulteriore dimostrazione intuitiva dell'Equazione di Schrödinger, forniamo la seguente:

sia Ψ la funzione d'onda; essa deve sottostare all'equazione delle onde $\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + k^2\Psi = 0$;

sappiamo dalle pagine precedenti che: $p = \hbar k$, da cui: $k^2 = \frac{p^2}{\hbar^2}$ e quindi:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{p^2}{\hbar^2} \Psi = 0. \quad (3.25)$$

Ora, abbiamo visto con la (3.20) che: $H - V = \frac{p^2}{2m}$, da cui: $\frac{2m}{\hbar^2}(H - V) = \frac{p^2}{\hbar^2}$ e la (3.25)

fornisce: $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{p^2}{\hbar^2} \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(H - V)\Psi = 0$ e cioè proprio la (3.22) monodimensionale!

Par. 3.2: Le Relazioni di Indeterminazione di Heisenberg (deduzione formale).

premesse sul valor medio di un operatore:

ricordiamo che con (Ψ, Ψ) intendiamo la seguente espressione: $\int \Psi^*(\vec{x}, t) \Psi(\vec{x}, t) d^3x$, che vale dunque 1 per Ψ normalizzate.

Abbiamo in precedenza parlato di probabilità P come funzione dello spazio (x o \vec{x}) e proporzionale al modulo quadro della funzione d'onda:

$$P \propto |\Psi(\vec{x}, t)|^2 = \Psi(\vec{x}, t) \Psi^*(\vec{x}, t), \text{ dove } \Psi^*(\vec{x}, t) \text{ è la complessa coniugata di } \Psi(\vec{x}, t)$$

(i scambiato con $-i$). Volendo poi valutare il valor medio (nello spazio) per un operatore F, possiamo utilizzare il concetto di media pesata, dove appunto il peso valutato in ogni punto dello spazio, dove si effettua la media, è allora $\Psi(\vec{x}, t) \Psi^*(\vec{x}, t)$:

$$\langle F \rangle = (\Psi, F\Psi) = \int \Psi^*(\vec{x}, t) F\Psi(\vec{x}, t) d^3x \quad (3.26)$$

premesse sui commutatori fondamentali:

si definisce commutatore dell'operatore A con l'operatore B: $[A, B] = AB - BA$. Ora, nel caso A e B siano semplici numeri, il commutatore sarà nullo, ma se essi sono invece degli operatori, allora può essere diverso.

Per i commutatori fondamentali, abbiamo:

$$[x_i, x_j] = x_i x_j - x_j x_i = 0 \quad (x = \text{posizione})$$

$$[p_i, p_j] = (-i\hbar \frac{\partial}{\partial x_i})(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x_j}) - (-i\hbar \frac{\partial}{\partial x_j})(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x_i}) = 0, \text{ (vedemmo che } p \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \text{).}$$

$$[x_i, p_j] = i\hbar \delta_{ij};$$

infatti, immaginando di applicare il commutatore ad un operatore ausiliario φ generico:

$$[x_i, p_j] \varphi = x_i (-i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}) - (-i\hbar \frac{\partial}{\partial x_j})(x_i \varphi) = -i\hbar x_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + i\hbar \frac{\partial x_i}{\partial x_j} \varphi + i\hbar x_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = i\hbar \delta_{ij} \varphi$$

con δ_{ij} che è la Delta di Kronecker, e vale 0 se $i \neq j$ e 1 se $i = j$. Infatti, essendo x_i e x_j ortogonali e linearmente indipendenti (come lo sono x, y e z), si ha proprio $\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}$.

Riguardo invece il commutatore $[t, E]$: (ricordando che $E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$)

$$[t, E] \varphi = i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} - i\hbar \frac{\partial}{\partial t}(t\varphi) = i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} - i\hbar \frac{\partial t}{\partial t} \varphi - i\hbar t \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -i\hbar \varphi \text{ e dunque:}$$

$$[t, E] = -i\hbar$$

premesse sulle equazioni agli autovalori e sugli scarti:

così come x_i è una determinata posizione su un determinato asse (ad esempio, $x_1=x$, $x_2=y$, $x_3=z$), così pure Ψ_i è un determinato stato i , inteso come componente i di una funzione d'onda Ψ , magari di uno spazio ad infinite dimensioni ($i=\infty$).

Se esistono stati "i" in cui un operatore F (che può essere anche semplicemente un numero reale f) ha un ben definito valore, allora evidentemente si ha:

$\langle F \rangle_i = f_i$. F sarebbe una "osservabile", evidentemente. Ricordiamo poi la definizione di scarto quadratico medio ΔF per F e richiediamo che esso si annulli:

$\Delta F = \sqrt{\langle F^2 \rangle_i - \langle F \rangle_i^2} = 0$. Definiamo altresì lo "scarto semplice" Δ_F :

$\Delta_F = F - \langle F \rangle_i$. Si ha allora che:

$\langle \Delta_F^2 \rangle_i = \langle (F - \langle F \rangle_i)^2 \rangle_i = \langle F^2 \rangle_i + \langle F \rangle_i^2 - 2\langle F \rangle_i \langle F \rangle_i = \langle F^2 \rangle_i - \langle F \rangle_i^2 = (\Delta F)^2$. Ora, la richiesta qui

sopra, secondo cui: $\Delta F = 0$, si traduce in quanto segue:

$\langle \Delta_F^2 \rangle_i = 0 = (\Psi_i, \Delta_F^2 \Psi_i) = 0$. Essendo poi F un'osservabile, dunque hermitiana ($F^* = F$) anche Δ_F sarà hermitiano, e allora potremo scrivere:

$\langle \Delta_F^2 \rangle_i = (\Psi_i, \Delta_F^2 \Psi_i) = (\Delta_F \Psi_i, \Delta_F \Psi_i) = \int |\Delta_F \Psi_i|^2 d\xi = 0$, da cui: $\Delta_F \Psi_i = 0$, ossia: $F\Psi_i = f_i\Psi_i$, che è l'equazione agli autovalori per F .

premesse sulla Diseguaglianza di Schwarz:

considerando il prodotto scalare tra due vettori come la proiezione di uno sull'altro, si ha:

$\vec{u} \cdot \vec{w} = |\vec{u}||\vec{w}|\cos\theta \leq |\vec{u}||\vec{w}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} \sqrt{\vec{w} \cdot \vec{w}} = \sqrt{u^2} \sqrt{w^2}$, in quanto $\cos\theta \leq 1$.

$\vec{u} \cdot \vec{w} \leq \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} \sqrt{\vec{w} \cdot \vec{w}}$ è una espressione generale della Diseguaglianza di Schwarz.

Tornando ora al nostro formalismo operatoriale quantistico dei valori medi, si ha, per analogia: $|\langle \Psi, FG\Psi \rangle| \leq \sqrt{\langle \Psi, F^2\Psi \rangle} \sqrt{\langle \Psi, G^2\Psi \rangle}$, ossia anche (col quadrato di entrambi i membri, se vogliamo):

$|\langle \Psi, FG\Psi \rangle|^2 \leq \langle \Psi, F^2\Psi \rangle \langle \Psi, G^2\Psi \rangle = \langle \Psi, FF\Psi \rangle \langle \Psi, GG\Psi \rangle$ ed essendo F e G hermitiani, si avrà anche: $|\langle F\Psi, G\Psi \rangle|^2 \leq \langle F^* \Psi, F\Psi \rangle \langle G^* \Psi, G\Psi \rangle = \langle F\Psi, F\Psi \rangle \langle G\Psi, G\Psi \rangle$, (3.27)

in quanto, dalla definizione (3.26), è banale verificare che un operatore nelle tonde si può spostare da una parte all'altra della virgola, a patto di farne il complesso coniugato e, se esso è hermitiano, il suo complesso coniugato coincide con se stesso.

La (3.27) è la Diseguaglianza di Schwarz che a noi interessa.

finalmente le Relazioni di Indeterminazione di Heisenberg:

essendo ora padroni di tutta la terminologia e di tutto il formalismo quantistico di cui sopra, proviamo a valutare la seguente espressione: $(i\langle [F, G]_\Psi \rangle)^2$, con F e G hermitiani:

$(\langle i[F, G]_\Psi \rangle)^2 = |\langle \Psi, FG\Psi \rangle - \langle \Psi, GF\Psi \rangle|^2$, ma possiamo altresì scrivere che:

$|\langle \Psi, FG\Psi \rangle - \langle \Psi, GF\Psi \rangle|^2 \leq (|\langle \Psi, FG\Psi \rangle| + |\langle \Psi, GF\Psi \rangle|)^2$, in quanto la somma dei moduli è sicuramente non inferiore alla differenza semplice.

Essendo F e G hermitiani, possiamo poi scrivere:

$\langle \Psi, GF\Psi \rangle = \langle G\Psi, F\Psi \rangle = \langle FG\Psi, \Psi \rangle = \langle \Psi, FG\Psi \rangle^*$ e $\langle \Psi, FG\Psi \rangle = \langle F\Psi, G\Psi \rangle$ e allora, tornando alle precedenti:

$(\langle i[F, G]_{\Psi} \rangle)^2 \leq 4|(F\Psi, G\Psi)|^2$; poi, per Schwarz: $|(F\Psi, G\Psi)|^2 \leq (F\Psi, F\Psi)(G\Psi, G\Psi)$ e dunque ancora:

$$(\langle i[F, G]_{\Psi} \rangle)^2 \leq 4(\Psi, F^2\Psi)(\Psi, G^2\Psi) = 4\langle F^2 \rangle_{\Psi} \langle G^2 \rangle_{\Psi} \quad (3.28)$$

Definiamo in precedenza: $\Delta_F = F - \langle F \rangle_{\Psi}$, e, analogamente: $\Delta_G = G - \langle G \rangle_{\Psi}$, cioè:

$$\begin{cases} \Delta_F = F - \langle F \rangle_{\Psi} \\ \Delta_G = G - \langle G \rangle_{\Psi} \end{cases} \quad (3.29)$$

ed otterremo anche che: $\langle \Delta_F^2 \rangle_{\Psi} = \langle F^2 \rangle_{\Psi} - \langle F \rangle_{\Psi}^2 = (\Delta F)^2$ e, sempre per analogia, allora pure: $\langle \Delta_G^2 \rangle_{\Psi} = \langle G^2 \rangle_{\Psi} - \langle G \rangle_{\Psi}^2 = (\Delta G)^2$, cioè:

$$\begin{cases} \langle \Delta_F^2 \rangle_{\Psi} = \langle F^2 \rangle_{\Psi} - \langle F \rangle_{\Psi}^2 = (\Delta F)^2 \\ \langle \Delta_G^2 \rangle_{\Psi} = \langle G^2 \rangle_{\Psi} - \langle G \rangle_{\Psi}^2 = (\Delta G)^2 \end{cases} \quad (3.30)$$

$$\text{Dalle (3.29) segue che: } [\Delta_F, \Delta_G] = [F, G], \quad (3.31)$$

in quanto, nell'esplicitare $[\Delta_F, \Delta_G]$ i prodotti di F e di G con i v.m. si elidono a vicenda (mentre non si elidono FG e GF). A questo punto, effettuiamo nella (3.28) le sostituzioni $F \rightarrow \Delta_F$ e $G \rightarrow \Delta_G$; si ha:

$$(\langle i[\Delta_F, \Delta_G]_{\Psi} \rangle)^2 \leq 4\langle \Delta_F^2 \rangle_{\Psi} \langle \Delta_G^2 \rangle_{\Psi} \quad (3.32)$$

e tenuto conto anche delle (3.30) e della (3.31), la (3.32) cambia ancora:

$$(\langle i[F, G]_{\Psi} \rangle)^2 \leq 4(\Delta F)^2 (\Delta G)^2, \text{ da cui:}$$

$$\Delta F \cdot \Delta G \geq \frac{1}{2} |\langle i[F, G]_{\Psi} \rangle| \quad (3.33)$$

che è la relazione di Indeterminazione di Heisenberg.

Ponendo ora $F=x$ e $G=p$ e ricordando le premesse sui commutatori fondamentali, dalla

(3.33) si ha la famosa: $\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$. (se voglio conoscere bene la posizione di un elettrone,

devo fare delle rinunce sulla valutazione della sua velocità $\propto p$, e viceversa)

Invece, ponendo $F=t$ e $G=E$ e ricordando sempre le premesse sui commutatori

fondamentali, sempre dalla (3.33) si ha la altrettanto famosa: $\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$.

Grazie per l'attenzione.

Leonardo RUBINO

E-mail: leonrubino@yahoo.it

Bibliografia:

- 1) (*M. Alonso & E.J. Finn*) FUNDAMENTAL UNIVERSITY PHYSICS III, Addison-Wesley.
 - 2) (*C. Rossetti*) ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA (Intr. alla M.Q.), Levrotto & Bella.
 - 3) (*R. Gautreau & W. Savin*) FISICA MODERNA – Schaum.
 - 4) LA LEGGE DI HOOKE ALLA BASE DELL'UNIVERSO <http://altrogiornale.org/download/266772/>
 - 5) (*R. Feynman*) LA FISICA DI FEYNMAN I-II e III – Zanichelli.
 - 6) (*Lionel Lovitch-Sergio Rosati*) FISICA GENERALE, Elettricità, Magnetismo, Elettromagnetismo Relatività Ristretta, Ottica, Meccanica Quantistica , 3[^] Edizione; Casa Editrice Ambrosiana-Milano.
 - 7) (*C. Mencuccini e S. Silvestrini*) FISICA I – Meccanica-Termodinamica, Liguori.
 - 8) (*C. Mencuccini e S. Silvestrini*) FISICA II – Elettromagnetismo-Ottica, Liguori.
-