



For the English version see below, after the Italian one.



LASER THEORY

di

Leonardo Rubino.

leonrubino@yahoo.it

Pubblicata su www.fisicamente.net

Ottobre 2001 – Rev. 00

INDICE:	-Pag. 1/18
-LASER THEORY	-Pag. 2/18
Pompaggio Ottico	-Pag. 6/18
Esempio di schema costruttivo (Laser a rubino)	-Pag. 7/18
Tecniche di pompaggio	-Pag. 7/18
Tipi di Lasers	-Pag. 8/18
-APPENDICE	-Pag. 9/18
A) La Legge di Distribuzione di Boltzmann	-Pag. 9/18
B) Lo Spettro di Corpo Nero di Planck	-Pag. 11/18
C) L'Oscillatore Armonico Lineare	-Pag. 17/18
D) Onde Stazionarie	-Pag. 18/18
-BIBLIOGRAFIA	-Pag. 18/18

LASER THEORY:

Il Laser è un dispositivo le cui applicazioni si stanno diffondendo in un ampio ventaglio di settori.

Laser è l'acronimo di Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation, cioè amplificazione di luce mediante emissione stimolata di radiazione.

Il primo amplificatore di radiazione elettromagnetica fu realizzato con ammoniaca nella zona delle microonde, e venne chiamato Maser, dalle iniziali di Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation. Con la realizzazione di amplificatori nel campo del visibile, a partire dal 1960, è stato poi introdotto il termine Laser.

Consideriamo un materiale in presenza di radiazione; ci aspettiamo che esso evidenzi le seguenti modalità di comportamento:

- a) a partire dallo stato fondamentale di energia minima E_i , l'atomo può assorbire fotoni di frequenza ν tale che $h\nu = E_f - E_i$, dove E_f è l'energia dello stato eccitato contiguo ad E_i .

(un commento sull'equazione di Planck/Einstein $E=h\nu$ viene dato in appendice)

Corrispondentemente, l'elettrone che assorbe il fotone passa dal suo stato fondamentale allo stato di energia E_f . Questo processo è detto assorbimento stimolato di radiazione.

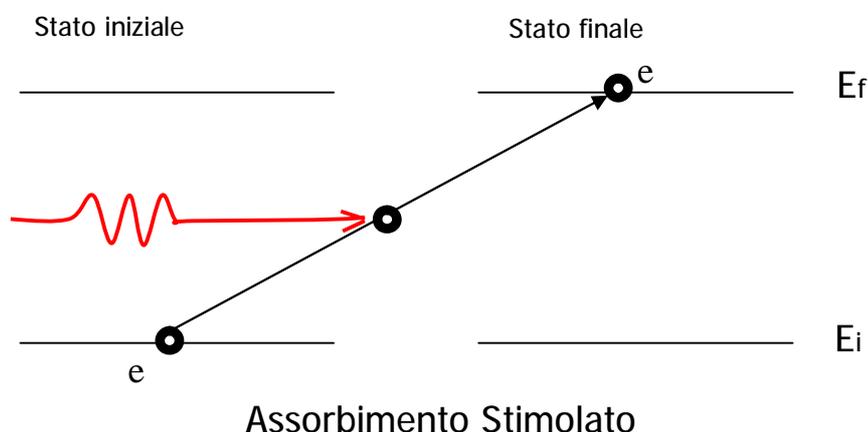
Albert Einstein suppose che la probabilità per unità di tempo che ciò avvenga fosse proporzionale, secondo una costante, alla densità di energia della radiazione alla frequenza ν , cioè ad $f(\nu)$ (vedi eq.ne di Planck in appendice); quindi:

$$R_{if} = B_{if} \cdot f(\nu) ; B_{if} \text{ è il Coefficiente B di Einstein.}$$

La frequenza degli eventi di assorbimento stimolato con transizione $i \rightarrow f$, riferita all'unità di volume del materiale, sarà pertanto:

$$N_f = n_i \cdot R_{if} = n_i \cdot B_{if} \cdot f(\nu) \quad [1.1]$$

dove n_i è il numero, per unità di volume, di atomi che si trovano nello stato fondamentale E_i (popolazione dello stato fondamentale).



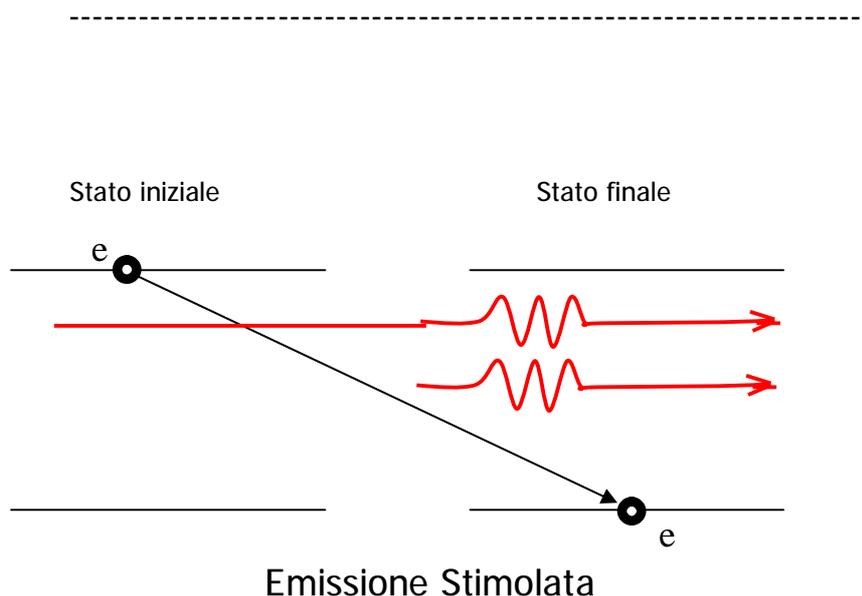
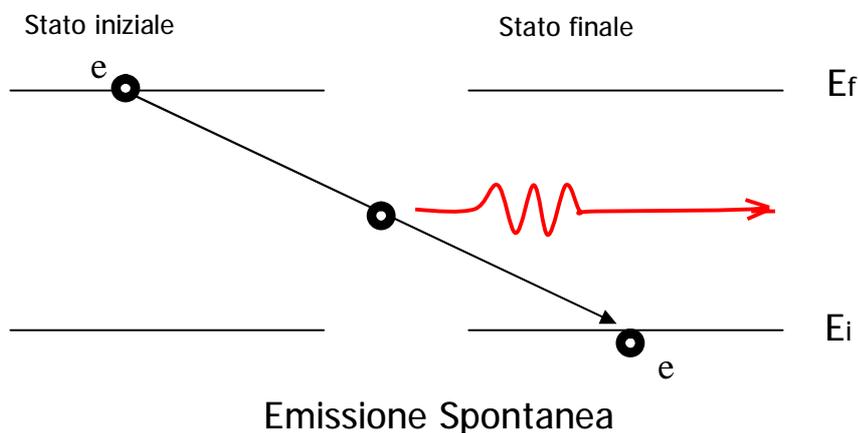
b) una volta eccitato nello stato finale E_f , l'atomo tende a cadere nuovamente nello stato fondamentale E_i . Ciò può accadere attraverso diversi meccanismi, fra i quali siamo qui interessati ai due seguenti meccanismi radiativi:

-emissione spontanea di un fotone, anch'esso di frequenza $\nu = (E_f - E_i) / h$.

La vita media, per emissione spontanea, degli stati eccitati, varia molto da caso a caso: può essere dell'ordine dei nanosecondi, fino all'ordine dei millisecondi.

L'emissione spontanea è alla base di tutte le sorgenti di luce convenzionali, come le lampadine.

-emissione stimolata, quando l'atomo, trovandosi nello stato eccitato, viene investito da un altro fotone di frequenza $\nu = (E_f - E_i) / h$. In questo caso, il ritorno allo stato iniziale è accompagnato dalla emissione di un secondo fotone che si aggiunge a quello incidente ed ha, rispetto ad esso, la stessa frequenza, la stessa fase e la stessa direzione di propagazione.



La probabilità R_{fi} , per unità di tempo, che l'atomo torni nello stato fondamentale iniziale, può essere scritta nella forma:

$$R_{fi} = A_{fi} + B_{fi} \cdot f(n) ,$$

dove A_{fi} è il Coefficiente A di Einstein, e rappresenta il termine di emissione spontanea, mentre $B_{fi} f(n)$ è il termine di emissione stimolata.

Notiamo che il termine di emissione spontanea è indipendente dalla radiazione $f(n)$, mentre il termine di emissione stimolata è ovviamente proporzionale alla densità di radiazione stimolatrice, cioè ad $f(n)$.

La frequenza di emissione con transizione $f \rightarrow i$, in analogia con il caso precedente, sarà:

$$N_i = n_f \cdot R_{fi} = n_f [A_{fi} + B_{fi} \cdot f(n)] \quad [1.2]$$

dove n_f è la popolazione dello stato eccitato.

Cominciamo col supporre che il materiale e la radiazione siano tra loro in equilibrio. Il numero di fotoni emessi nell'unità di tempo deve allora essere uguale al numero di fotoni assorbiti, cioè:

$$N_f = N_i \rightarrow n_i \cdot B_{if} \cdot f(n) = n_f [A_{fi} + B_{fi} \cdot f(n)]$$

Risolvendo rispetto ad $f(n)$, si ottiene :

$$f(n) = \frac{A_{fi} / B_{fi}}{(n_i/n_f)(B_{if}/B_{fi}) - 1}$$

All'equilibrio termico, per la distribuzione di Boltzmann (vedi appendice), si ha che:

$$n_i = n_0 e^{-E_i/kT} , \quad n_f = n_0 e^{-E_f/kT} , \text{ con } n_0 = \text{costante,}$$

da cui:

$$n_i / n_f = e^{-E_i/kT} / e^{-E_f/kT} = e^{(E_f - E_i)/kT} = e^{hn/kT}$$

Si ha quindi, per $f(n)$:

$$f(n) = \frac{A_{fi} / B_{fi}}{(B_{if} / B_{fi}) e^{hn/kT} - 1} \quad [1.3]$$

Valendo contemporaneamente, all'equilibrio termico, la relazione di Planck sull'emissione del corpo nero (vedi appendice):

$$f(n) = \frac{8phn^3}{c^3} \left(\frac{1}{e^{hn/kT} - 1} \right)$$

si otterranno, per confronto, le relazioni di Einstein:

$$B_{if} / B_{fi} = 1$$

$$A_{fi} / B_{fi} = 8phn^3 / c^3$$

c è la velocità della luce nel vuoto ($c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$).

Queste relazioni, necessarie per garantire il soddisfacimento di condizioni generali richieste all'equilibrio termico, hanno però validità del tutto generale.

La prima di esse mostra che il coefficiente B per emissione indotta è pari a quello per assorbimento indotto. La seconda ci dice che l'emissione spontanea è tanto più favorita rispetto all'emissione stimolata quanto più grande è n , cioè, tanto maggiore quanto maggiore è la differenza di energia $E_f - E_i$. Ecco perché la realizzazione di lasers a raggi X (n elevata) è molto problematica.

Ponendo nella [1.3] $B_{if} = B_{fi}$, otteniamo da questa una relazione, valida all'equilibrio termico, che esprime il rapporto fra la probabilità di decadimento spontaneo e quella di decadimento stimolato:

$$\frac{A_{fi}}{B_{fi} \cdot f(n)} = (e^{hn/kT} - 1) \quad [1.4]$$

A temperatura ambiente, per n compreso nello spettro visibile o infrarosso, si ha $hn \gg kT$, e dunque tale rapporto è $\gg 1$, cioè, l'emissione spontanea è dominante rispetto a quella stimolata.

(Si ricorda che la Costante di Boltzmann k vale $1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$, mentre la costante di Planck h vale $6,625 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$; per un'interpretazione del significato di tali costanti, si veda l'appendice).

Il Laser è un dispositivo in cui, attraverso opportune tecniche, le popolazioni n_i ed n_f dei due stati vengono controllate dall'esterno, portandole a valori diversi da quelli propri dell'equilibrio termico.

Precisamente, si fa sì che $n_f > n_i$, cioè, si tiene la popolazione dello stato eccitato maggiore di quella dello stato fondamentale. Notiamo preliminarmente che per n piccole (es.: microonde), $h\nu \ll kT$; dunque, il 1° membro della [1.4] risulterebbe abbastanza piccolo; sotto tali ipotesi, facendo il rapporto tra la [1.2] e la [1.1], si ottiene:

$$\frac{N_i}{N_f} = \frac{n_f}{n_i} \left(1 + \frac{A_{fi}}{B_{fi} \cdot f(\nu)} \right) \quad (\text{quantità tra parentesi} \cong 1)$$

Da questa relazione si vede che, se $n_f > n_i$, allora $N_i > N_f$, cioè la radiazione emessa è più intensa di quella assorbita.

Realizzando opportunamente la geometria del materiale, la radiazione dovuta alla emissione stimolata viene intrappolata nel materiale, quindi la densità $f(\nu)$ diviene molto elevata e l'emissione stimolata sarà dominante rispetto a quella spontanea.

Considerato che, nella emissione stimolata, il fotone emesso è in fase con quello stimolante, si ottiene un fascio di luce monocromatico molto intenso, coerente (fotoni in fase) e collimato.

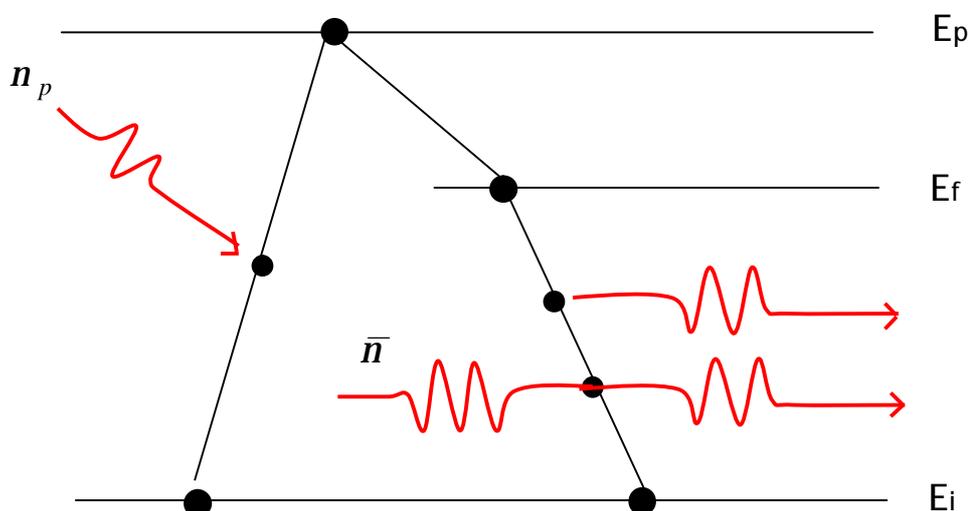
n_f può essere mantenuta maggiore di n_i tramite pompaggio (ottico, elettrico, gasdinamico).

Essendo i fotoni di un raggio Laser tutti in fase tra loro (coerenza), i loro effetti (es: termici) sul materiale su cui incidono, si sommano tra loro, determinando l'efficacia caratteristica del Laser stesso.

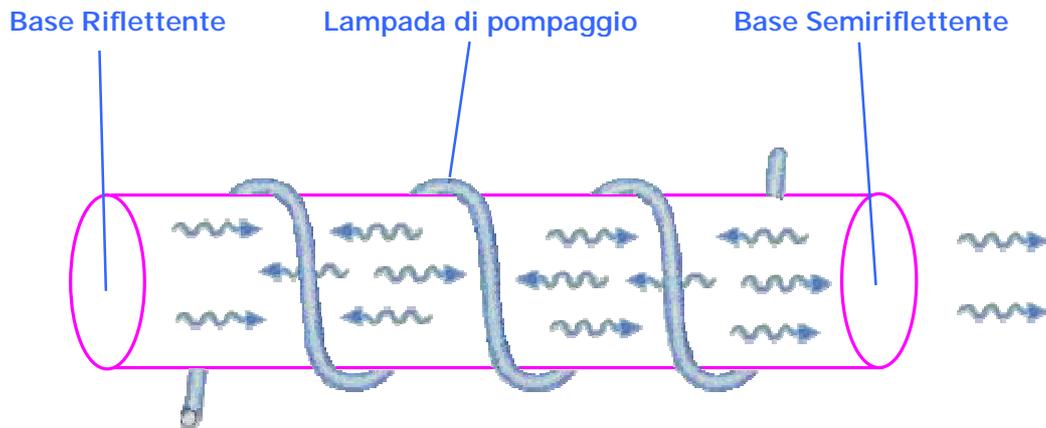
POMPAGGIO OTTICO:

Viene scelto un materiale per cui lo stato E_f sia uno stato metastabile, cioè a lunga vita media (ad es: $t = 10^{-3} s$) contiguo ad uno stato $E_p > E_f$ a corta vita media (ad es: $t = 10^{-8} s$).

Inviando sul materiale radiazione di frequenza $\nu = (E_p - E_i) / h$ (radiazione di pompaggio), vengono indotte transizioni elettroniche verso lo stato E_p . Da qui gli elettroni decadono spontaneamente verso lo stato E_f , ed avendo la possibilità di restare in esso parcheggiati per un tempo assai più lungo, ne aumentano la popolazione fino al valore voluto.



ESEMPIO DI SCHEMA COSTRUTTIVO (Laser a rubino):



Il Laser a rubino è il primo Laser che sia stato fatto funzionare; il rubino è un cristallo di corindone (Al_2O_3) con impurezze di ioni Cr^{+++} . Il rubino possiede una forte banda di assorbimento nel verde che viene sfruttata per creare l'inversione di popolazione.

Mediante una sorgente intensa di luce verde (lampada al mercurio ad alta pressione), gli ioni cromo vengono eccitati a livelli che hanno un decadimento molto veloce verso un livello inferiore. Queste transizioni veloci sono causate dalle interazioni degli ioni con le vibrazioni del reticolo cristallino.

Il livello inferiore diventa quello attivo per l'azione laser che avviene ad una lunghezza d'onda di 694,3 nm.

Il cristallo di rubino ha forma cilindrica, con una base speculare e l'altra semispeculare. Contrariamente ai fotoni disassati, che possono uscire dalla superficie laterale del cilindro, i fotoni che si muovono assialmente compiono un percorso molto lungo nel cristallo, ed hanno così elevata probabilità di attivare una emissione stimolata nel cristallo, e di moltiplicare così la presenza di fotoni tutti fra loro in fase e collimati.

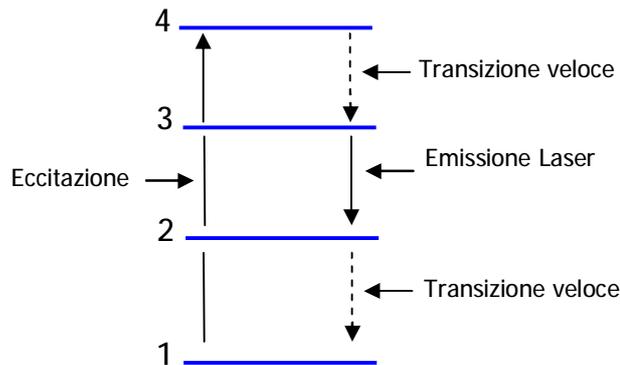
Intorno al cristallo, una lampada a spirale provvede al pompaggio ottico; nel caso del rubino, la frequenza di radiazione di pompaggio è $\nu = 5,455 \cdot 10^{14}$ Hz. Dalla base semitrasparente emerge un fascio coerente e collimato, la cui frequenza è pari a $4,321 \cdot 10^{14}$ Hz.

TECNICHE DI POMPAGGIO:

- pompaggio ottico con sorgenti convenzionali (lampade ad incandescenza, a scariche in gas, a flash, il sole, ecc), con diodi emettitori di luce o con altri Lasers.
- pompaggio tramite radiofrequenza.
- pompaggio per mezzo di scarica elettrica, se il materiale è aeriforme.
- pompaggio del materiale solido con urti di elettroni.
- dissociazione chimica in stati eccitati(Lasers chimici).
- processi termodinamici(es: rapida espansione di gas).

TIPI DI LASERS:

Il laser a rubino appena esaminato lavora su tre livelli $E_i(1)$, $E_f(2)$ ed $E_p(3)$, ed è quindi di tipo a tre livelli, ed il ciclo è $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$. Esistono anche Lasers a quattro livelli, dove il livello E_f è arricchito grazie alla transizione $4 \rightarrow 3$ da E_p ad E_f , e, contemporaneamente, il livello E_i viene impoverito dalla transizione $2 \rightarrow 1$ verso un livello più basso. Il Laser a quattro livelli ha un rendimento maggiore di quello a tre.



Uno dei Lasers a gas più comuni è il Laser He Ne che oscilla alla lunghezza d'onda di 632,8 nm.

L'azione Laser avviene tra i livelli dell'atomo di neon, mentre l'elio viene usato nel mezzo attivo per facilitare il processo di pompaggio.

Per quanto riguarda il meccanismo di eccitazione (pompaggio), nella miscela di elio e neon a bassa pressione viene mantenuta una scarica elettrica; a causa degli urti fra elettroni e ioni, vengono popolati, tra gli altri, anche alcuni livelli dell'elio, che sono metastabili, cioè che hanno una probabilità assai piccola di decadere a livelli sottostanti. La popolazione di questi stati diviene apprezzabile e, tramite urti, la loro energia può essere trasferita ad atomi di neon per eccitare alcuni livelli ben precisi. In conclusione, il meccanismo dell'inversione, in questo caso, è il seguente: popolazione di uno stato superiore del neon per urti selettivi; svuotamento, in seguito a transizioni, verso lo stato inferiore; energia elettrica che viene direttamente trasformata in energia luminosa.

Va osservato che il Laser He Ne può funzionare, oltre che alla normale lunghezza d'onda di 632,8 nm, caratteristica di tutti i piccoli Lasers commerciali, anche ad altre lunghezze d'onda, sia visibili (es: 612 nm) , che infrarosse (es. 1,15 μm , 3,39 μm).

Tra i Lasers che operano con un mezzo attivo liquido, i più noti sono i Lasers a coloranti organici.

Si tratta, di solito, di soluzioni di rodamina, cumarina, o simili, in alcool, acqua, o altro opportuno solvente. Le molecole di colorante hanno una struttura molto complessa, con una densità elevata di livelli energetici. Questo fa sì che siano possibili una grande quantità di transizioni, in modo tale che l'emissione Laser può coprire vaste bande di frequenza, dell'ordine di 30/40 nm in λ . Lo schema di funzionamento è del tipo a quattro livelli; l'eccitazione allo stato più alto viene ottenuta tramite lampade a flash o con altri Lasers visibili, mentre le transizioni intermedie veloci sono garantite dalle forti interazioni

presenti nei liquidi. Il principale interesse di questi Lasers consiste nella possibilità di ottenere un'emissione accordabile in frequenza.

Esistono anche numerosi Lasers operanti in regime pulsato, nei quali l'inversione di popolazione si può realizzare per periodi di tempo estremamente brevi, cosicchè anche l'emissione ha la durata di alcuni nanosecondi. Tra questi vanno citati certi Lasers a gas, come il Laser ad azoto, ed i Lasers ad eccimeri, cioè molecole costituite da alogenuri di gas nobili.

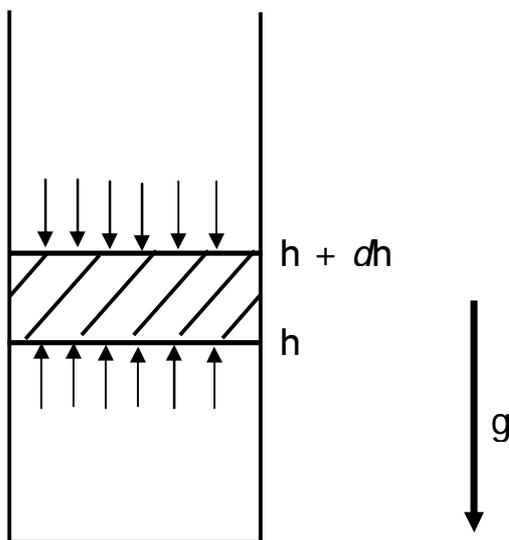
Laser Theory

APPENDICE:

A) La Legge di Distribuzione di Boltzmann:

Cercheremo di capire come varia, in un materiale, il numero di molecole per unità di volume al variare dell'energia.

Supponiamo di avere una colonna di gas a temperatura costante posto in un recipiente e sotto l'effetto del campo gravitazionale.



Se il nostro recipiente ha un volume V e contiene N particelle di gas, si definisca n come il numero di particelle per unità di volume.

Con riferimento alla figura sopra, si consideri una sezione S della colonna di gas alla generica altezza h . La pressione P_h all'altezza h è ovviamente superiore a quella all'altezza $h+dh$, poiché ad h la quantità di gas che grava verso il basso è maggiore.

Essendo la pressione P definita come $dF/dS = (\text{peso del disco alto } dh \text{ e di sezione } S) / S$, si ha:

$$P_{h+dh} - P_h = dP = \frac{-m \cdot n \cdot S \cdot dh \cdot g}{S} = -mgndh, \quad [\text{A.1}]$$

dove m è la massa di ogni singola particella di gas, n è il numero di particelle per unità di volume, $S \cdot dh$ è il volume del disco considerato, g è l'accelerazione di gravità ed il segno $-$ testimonia il fatto che dP è negativo (P diminuisce salendo).

Sappiamo anche dalla termodinamica che :

$$PV = n_{\text{kmoli}} RT = n_{\text{kmoli}} N_A \cdot \frac{R}{N_A} T = N \cdot k \cdot T, \quad [\text{A.2}]$$

dove la prima eguaglianza è la legge di stato dei gas perfetti ($R=\text{cost}$), N_A è il numero di particelle contenute in una kilomole, cioè il Numero di Avogadro, $N = n_{\text{kmoli}} N_A$ è il numero totale di particelle del gas in esame (evidentemente costituito da n_{kmoli}) e $k=R/N_A$ è la costante di Boltzmann.

Per la dimostrazione dell'Eq. di stato dei gas perfetti si consulti un qualsiasi testo di Fisica Generale.

Dalla precedente equazione si ricava che:

$$P = \frac{N}{V} kT = nkT.$$

Differenziando quest'ultima relazione, si ottiene:

$$dP = dnkT \quad [\text{A.3}]$$

Combinando la [A.1] con la [A.3], si ottiene:

$$\frac{dn}{n} = -\frac{mg}{kT} dh = -\frac{dE_p}{kT},$$

dove $dE_p = mgdh$ è il differenziale dell'energia potenziale posseduta da ciascuna particella. L'integrazione di questa equazione differenziale dà banalmente il seguente risultato:

$$n = n_0 e^{-E_p/kT}, \quad [\text{A.4}]$$

dove n_0 è costante.

Nel caso in cui le particelle siano soggette non al campo gravitazionale, ma ad una qualsiasi altra forza conservativa F_i (ad esempio le forze intermolecolari stesse), che supporremo diretta verso la direzione x , nella [A.4], in luogo dell'energia potenziale E_p , si avrà la corrispondente energia potenziale E_i derivante dalla forza F_i , cioè:

$$E_i = -\int F_i \cdot dx.$$

In definitiva:

$$n = n_0 e^{-E_i/kT} \quad [\text{A.5}]$$

Il caso di azione di forze non conservative non lo prendiamo neanche in considerazione, poiché, in tal caso, non sarebbe neppure possibile pretendere l'equilibrio termico.

Per noi, l'equazione di Boltzmann [A.5] può ritenersi dimostrata e vogliamo ricordare ciò che tale equazione esprime:

La probabilità di trovare molecole in una data disposizione spaziale varia esponenzialmente con l'opposto dell'energia potenziale di quella disposizione, diviso per kT .

La stessa equazione è estendibile al caso Laser nostro sulle popolazioni dei livelli energetici.

B) Lo Spettro di Corpo Nero di Planck:

Consideriamo una cavità le cui pareti si trovino alla temperatura T uniforme e costante. Le cariche microscopiche costituenti le pareti si muovono in virtù dell'agitazione termica, e, così facendo, irradiano onde elettromagnetiche che vanno riempiendo la cavità; si trasferisce così energia dalle pareti al campo elettromagnetico. Le onde elettromagnetiche, a loro volta, muovendosi internamente alla cavità, urtano contro le pareti; si trasferisce così energia dal campo alle pareti. Si raggiunge quindi un equilibrio.

Si chiama **Spettro della Radiazione di Corpo Nero** la funzione $f(n)$ tale che $f(n)dn$ indica la quantità di *energia* posseduta dal campo elettromagnetico contenuto nell'unità di *volume* della cavità, e avente frequenza compresa tra n e $n + dn$, ossia:

$$f(n)dn = du \quad [J / m^3]$$

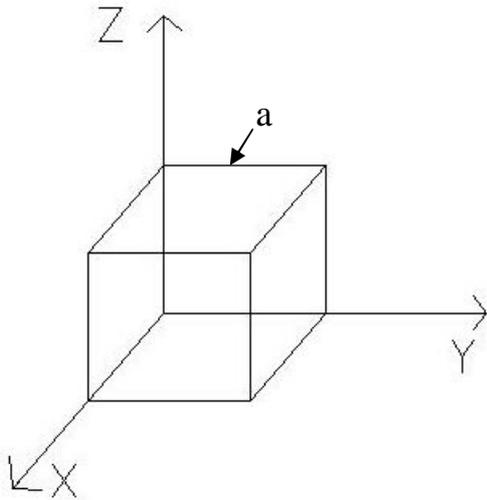
Le pareti della cavità che emettono ed assorbono radiazione possono essere considerate come composte da piccoli dipoli oscillanti. Inoltre, possiamo osservare che alla radiazione contenuta nella cavità dobbiamo assegnare due gradi di libertà corrispondenti ai due piani di polarizzazione perpendicolari e tra loro indipendenti su cui ogni onda elettromagnetica può oscillare; in parole più semplici, un'onda elettromagnetica che si propaga lungo z può oscillare trasversalmente sia sul piano zx che su quello zy .

Sappiamo poi dalla teoria cinetica dei gas che ad ogni particella, e quindi ad ogni onda emessa, e per ogni grado di libertà, va attribuita un'energia pari a due volte la quantità $\frac{1}{2}kT$, cioè kT , poiché l'energia totale si compone di una parte cinetica e di una

potenziale tra loro mediamente identiche(vedi la [A.12]).

Per la dimostrazione del fatto che l'energia totale da attribuire sia proprio kT /grado di libertà, si consultino un testo qualsiasi di Fisica Generale.

Supponiamo ora di avere, per semplicità, una cavità cubica, con la radiazione elettromagnetica che si propaga lungo i tre assi, dando luogo ad onde stazionarie; consideriamo inoltre solo un piano di polarizzazione per asse di propagazione (y), tenendo successivamente conto dell'effettiva esistenza di due gradi di libertà in seguito.



Essendo la cavità sede di onde stazionarie, e considerando l'asse x come asse di propagazione, si potrà esprimere la seguente equazione di un'onda stazionaria (vedi la [A.13]):

$$E_y(x, t) = E_{oy} \sin(kx) \cdot \sin(2pnt), \text{ con } k \text{ numero d'onda} = \frac{2p}{l} \text{ e } l \text{ lunghezza d'onda.}$$

Si ricorda che, banalmente: $c = l n$, e: $w = 2p / T = 2pn$.

Dovendosi l'onda stazionaria annullare in $x = 0$ ed in $x = a$, si avrà:

$$ka = np \rightarrow n = 2a / l \rightarrow n = \frac{c}{l} = \frac{c \cdot n}{2a}.$$

n è positivo, e non nullo, altrimenti non si ha onda.

In generale, per un'onda che si propaga lungo una direzione qualsiasi, si avrà, in componenti:

$$\begin{aligned} E_y(x, t) &= E_{oy} \sin(k_x x) \cdot \sin(2pnt) & k_x &= (2p / l) \cdot \cos a \\ E_z(y, t) &= E_{oz} \sin(k_y y) \cdot \sin(2pnt) & k_y &= (2p / l) \cdot \cos b \\ E_x(z, t) &= E_{ox} \sin(k_z z) \cdot \sin(2pnt) & k_z &= (2p / l) \cdot \cos g \end{aligned}$$

dove i tre coseni sono i "coseni direttori", cioè le componenti del versore \hat{k} che individua la direzione di propagazione dell'onda.

Sempre per analogia con il caso monodimensionale, si ha:

$$\begin{aligned} k_x a &= n_x p & \rightarrow (2a / l) \cos a &= n_x \\ k_y a &= n_y p & \rightarrow (2a / l) \cos b &= n_y \\ k_z a &= n_z p & \rightarrow (2a / l) \cos g &= n_z \end{aligned}$$

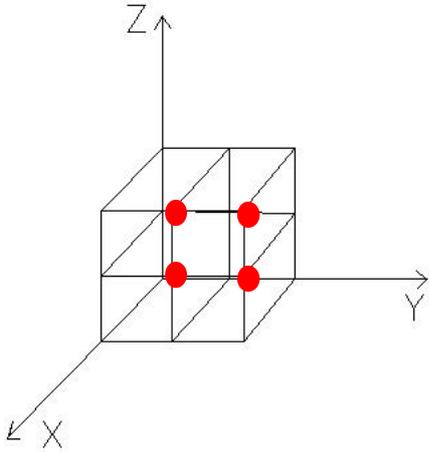
$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = (2a / l)^2 (\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 g) = 4a^2 / l^2,$$

da cui :

$$n = \frac{c}{l} = \frac{c}{2a} \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} \quad [\text{A.6}]$$

Al variare di tali n , si hanno tutti i possibili modi di vibrazione.

Ponendo tali valori di n_x , n_y , n_z su tre assi cartesiani, e considerando l'esempio di $n_x, n_y, n_z = (1, 2, 2)$, si noterà che il numero di vibrazioni possibili cui corrispondono terne n_x, n_y, n_z ($n_x, n_y, n_z \neq 0$, pena l'averne un caso degenere) sono i vertici del grafico seguente in cui gli n sono appunto diversi da zero, e cioè tutti i puntini rossi.



La cosa fondamentale che bisogna ora notare, e che ha validità generale, è che *tali modi di vibrazione possibili* (●) *corrispondono in numero ai cubetti di lato unitario (anch'essi 4)*. Quindi: **n . di modi di vibraz . possibili = volume totale V individuato dalla terna n_x, n_y, n_z** .

La radice nell'espressione [A.6] altro non è che il valore di un raggio di un ottante di sfera individuato dalle tre componenti n_x, n_y, n_z (si considera ovviamente solo l'ottante dove n_x, n_y, n_z sono positivi, poiché, questi, positivi e non nulli devono essere).

Tale ultima considerazione ci suggerisce di passare un momento alle più pratiche coordinate polari:

essendo il volume di un ottante di sfera pari a $\frac{1}{8} \frac{4}{3} p \cdot r^3$, il numero N di modi di vibrazione possibili per un valore di r compreso tra 0 ed r è:

$$N = \frac{1}{8} \frac{4}{3} p \cdot r^3.$$

Ne consegue che il numero $N(r) dr$ di modi di vibrazione possibili per un valore di r compreso tra r ed $r + dr$ è ottenibile differenziando l'espressione precedente:

$$N(r) dr = \frac{p}{2} r^2 dr.$$

Si definisca ora un $N(n)$ tale che $N(r)dr = N(n)dn$ = numero di modi di vibrazione possibili per frequenze comprese tra n e $n + dn$; osservando che, per la [A.6] $n = r c / (2 a)$, e, differenziando quest'ultima, si ha:

$$dn = \frac{c}{2a} dr ; \text{ si ottiene dunque:}$$

$$N(n)dn = \frac{p}{2} \left(\frac{2a}{c} \right)^3 n^2 dn = \frac{4p}{c^3} V n^2 dn , \text{ con } V = a^3 = \text{volume della cavità.}$$

Per passare dalla precedente relazione all'espressione di $f(n)$, ricordando la definizione della stessa $f(n)$ data in precedenza, si dovrà:

- dividere per V per riferirci all'unità di volume
- moltiplicare per due per tenere conto dei due possibili stati di polarizzazione della radiazione (come ci eravamo riservati di fare alla fine della pagina 11/18)
- moltiplicare per kT , cioè per l'energia media associata a ciascun grado di libertà.

In definitiva:

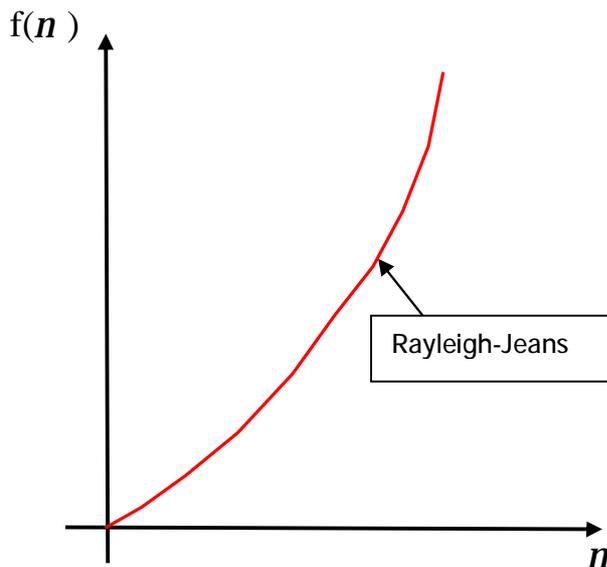
$$f(n)dn = \frac{8p}{c^3} kT n^2 dn , \quad \text{[A.7]}$$

nota come formula di Rayleigh-Jeans.

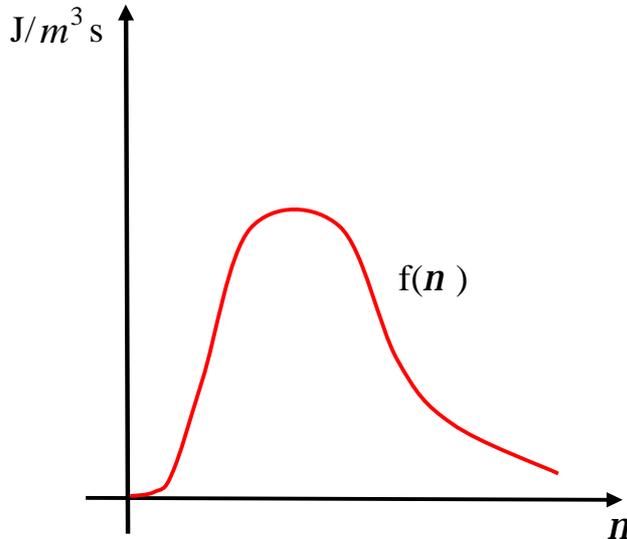
Ovviamente:

$$f(n) = \frac{8p}{c^3} kT n^2$$

Il grafico di questa equazione è qui sotto riportato.



Sperimentalmente, però, si osserva un altro comportamento, e cioè il seguente:

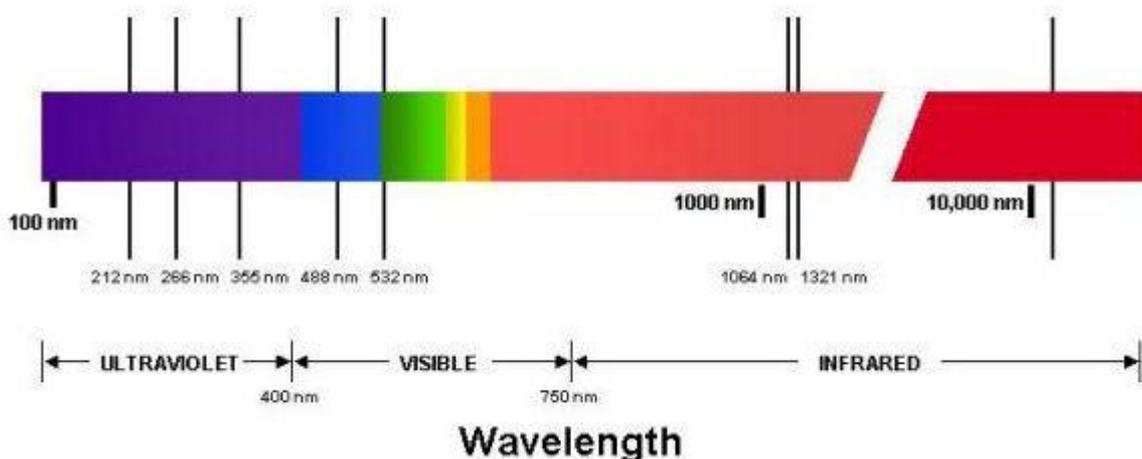


Nella realtà, quindi, si ha un picco, cioè un valore di frequenza intorno al quale l'emissione del corpo nero si concentra.

Ovviamente, la curva qui sopra vale per una fissata temperatura T , e, come vedremo, all'aumentare di T il picco si ha per valori di frequenza più alti.

Ecco, ad esempio, perché un pezzo di ferro a temperatura ambiente emette radiazione elettromagnetica nel campo degli infrarossi, o giù di lì, mentre, man mano che lo si scalda, arriva ad emettere, per temperature di alcune centinaia di gradi, nel campo del visibile (calor rosso, calor bianco).

Analogamente, si riescono a determinare molte caratteristiche della superficie di una stella analizzando lo spettro di frequenza della "luce" che la stessa ci invia.



Nulla di simile è invece confermato dal grafico alla Rayleigh-Jeans, che presuppone una catastrofe ultravioletta. Ciò segnò l'inizio della crisi della fisica classica, e ci fu la necessità di apportare idee ed ipotesi di carattere quantistico per far combaciare le deduzioni teoriche con la realtà; un esempio è la supposizione che Max Planck fece e che noi ora riportiamo.

Osserviamo innanzitutto che, se vogliamo stabilire l'energia media \bar{E} tra tutte le energie dei costituenti di un dato sistema, possiamo effettuare una media pesata di tutte le

energie, che sono distribuite secondo la già dimostrata formula di Boltzmann [A.5] per $n(E)$; dunque:

$$\bar{E} = \frac{\sum E_i \cdot n(E_i)}{\sum n(E_i)} = \frac{\sum E_i \cdot n_0 e^{-E_i/kT}}{\sum n_0 e^{-E_i/kT}} = \frac{\sum E_i \cdot e^{-E_i/kT}}{\sum e^{-E_i/kT}} ; \quad [\text{A.8}]$$

il numeratore è la somma di tutte le energie, ognuna delle quali pesata secondo il numero di costituenti che la possiedono, mentre il denominatore è il numero totale di particelle. Al momento, tale media fornirebbe il valore kT , che è proprio il valore di energia che noi abbiamo attribuito ad ogni costituente.

Con l'unico fine di passare dalla formula di Rayleigh-Jeans ad una formula il cui grafico fosse quello sperimentale del corpo nero, sopra riportato, Planck suppose che per ogni valore di frequenza n , l'energia del sistema potesse assumere solo valori discreti (quantizzati !):

$$E = hn, 2hn, \dots, nhn \quad , \quad (n \text{ intero}). \quad [\text{Eq. ne di Planck/Einstein}]$$

Con tale assunzione, la [A.8] diviene (sommatoria in n):

$$\bar{E} = \frac{\sum_0^{\infty} nhn \cdot e^{-nhn/kT}}{\sum_0^{\infty} e^{-nhn/kT}} .$$

Il risultato è:

$$\bar{E} = \frac{hn}{e^{hn/kT} - 1} ;$$

infatti, ponendo $\frac{hn}{kT} = z$, si ha: $\bar{E} = kT \frac{\sum_0^{\infty} nz \cdot e^{-nz}}{\sum_0^{\infty} e^{-nz}}$; definendo: $f(z) = \sum_0^{\infty} e^{-nz}$, si ha:

$$-z \cdot df/dz = z \sum_0^{\infty} n \cdot e^{-nz} = \sum_0^{\infty} nz \cdot e^{-nz} , \text{ dunque:}$$

$$\bar{E} = -kTz \frac{df/dz}{f} = -kTz \frac{d}{dz} \ln z = -kTz \frac{d}{dz} \ln \sum_0^{\infty} e^{-nz} .$$

Avendosi ora, per gli sviluppi di Taylor, oppure per lo studio delle serie geometriche, che:

$$\sum_0^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} , \quad \text{e ponendo: } e^{-z} = x , \text{ si ha:}$$

$$\bar{E} = -kTz \frac{d}{dz} \ln(1 - e^{-z})^{-1} = -kTz \frac{1}{(1 - e^{-z})^{-1}} (1 - e^{-z})^{-2} e^{-z} = kTz \frac{e^{-z}}{1 - e^{-z}} = \frac{kTz}{e^z - 1} = \frac{hn}{e^{hn/kT} - 1}$$

cioè l'asserto, dopo aver ricordato l'espressione di z .

La novità di Planck, dunque, è stata quella di porre nella eq. di Rayleigh-Jeans [A.7], in luogo dell'energia media per componente, cioè kT , il valore trovato di \bar{E} , quindi:

$$f(n)dn = \frac{8\pi n^2}{c^3} \frac{hn}{e^{hn/kT} - 1} dn \quad \text{[A.9]}$$

cioè, proprio l'equazione di Planck.

Dividendo entrambi i membri per dn , si ottiene l'espressione per $f(n)$ che descrive eccellentemente il grafico sperimentale sopra riportato sull'emissione del corpo nero!

C) L'Oscillatore Armonico Lineare

Consideriamo una massa fissata all'estremo di una molla; l'altro estremo della molla sia fisso ad una parete.

Quando la massa inizia ad oscillare, ricordando che $F=ma$ e che, per Hooke $F=-kx$, si potrà scrivere la seguente equazione differenziale:

$$ma + kx = m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0, \text{ la cui soluzione è:}$$

$$x = x_0 \sin(\omega t + q), \quad \text{[A.10]}$$

$$\text{con } \omega = \sqrt{k/m}.$$

Scriviamo ora l'espressione per l'energia totale E (pari all'energia cinetica più quella potenziale elastica) di questa massa che oscilla:

$$\frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} kx^2 = E = E_k + E_p \quad \text{[A.11]}$$

ciò perché:

$$E_p = -\int F \cdot dx = \int kx \cdot dx = \frac{1}{2} kx^2.$$

Sostituendo la [A.10] nella [A.11], e tenendo conto dell'espressione per ω , si ottiene:

$$E = \frac{m}{2} \omega^2 x_0^2 \cos^2(\omega t + q) + \frac{1}{2} k x_0^2 \sin^2(\omega t + q) = \quad [A.12]$$

$$= \frac{1}{2} k x_0^2 [\cos^2(\omega t + q) + \sin^2(\omega t + q)] = \frac{1}{2} k x_0^2$$

Risultando dall'espressione precedente che le componenti cinetica e potenziale sono identiche, abbiamo giustificato l'attribuzione di due componenti identiche pari a $(\frac{1}{2})kT$ per l'energia totale degli oscillatori della cavità (vedi pag. 11/18).

D) Onde Stazionarie

Se un'onda S_1 si propaga in un mezzo limitato, la sovrapposizione di essa con la sua riflessa S_2 dà origine ad un'onda stazionaria S :

$$S_1 = A \sin(kx - \omega t) , \quad S_2 = A \sin(kx + \omega t) .$$

La differenza di segno negli argomenti testimonia il fatto che le onde si propagano ognuna in senso opposto all'altra; inoltre, il termine $\omega t = 2\pi n t$ ci dice che, fissato un punto x , si ha oscillazione nel tempo, mentre il termine kx ci dice che, fissato un istante t , si nota un'oscillazione muovendosi lungo x .

Un'onda che si propaga, dunque, oscilla nel tempo e lungo la direzione di propagazione.

$$S = S_1 + S_2 = 2A \cdot \sin kx \cdot \cos \omega t = 2A \cdot \sin \frac{2\pi}{l} x \cdot \cos 2\pi n t ; \quad [A.13]$$

ciò dopo aver ricordato l'identità trigonometrica seguente:

$$\sin a + \sin b = 2 \cos \frac{(a - b)}{2} \cdot \sin \frac{(a + b)}{2} .$$

Bibliografia:

- 1) (C. Mencuccini-V. Silvestrini) FISICA II, Elettromagnetismo-Ottica , Liguori Editore.
- 2) (Alonso-Finn) FUNDAMENTAL UNIVERSITY PHYSICS III, Quantum and Statistical Physics , Addison-Wesley.
- 3) (Lionel Lovitch-Sergio Rosati) FISICA GENERALE, Elettricità, Magnetismo, Elettromagnetismo, Relatività Ristretta, Ottica, Meccanica Quantistica , 3[^] Edizione; Casa Editrice Ambrosiana-Milano.
- 4) (Richard P. Feynman) LA FISICA DI FEYNMAN 1 , Meccanica, Radiazione, Calore; Zanichelli.



LASER THEORY

by

Leonardo Rubino.

leonrubino@yahoo.it

Published on www.fisicamente.net

October 2001 – Rev. 00

CONTENTS:	-Page. 19/36
-LASER THEORY	-Page. 20/36
Optical pumping	-Page. 24/36
An example of a ruby Laser	-Page. 25/36
Pumping methods	-Page. 25/36
Kinds of Lasers	-Page. 25/36
-APPENDIX	-Page. 27/36
A) Boltzmann's Distribution Law	-Page. 27/36
B) Planck's Blackbody Spectrum	-Page. 29/36
C) The Linear Harmonic Oscillator	-Page. 34/36
D) Standing Waves	-Page. 35/36
-BIBLIOGRAPHY	-Pag. 36/36

LASER THEORY:

The Laser is a device which is today used in a wide list of fields.

Laser is an acronym for Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation.

The very first electromagnetic radiation amplifier was built with ammonia in the range of microwaves and was called Maser, for Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation. After that they started building amplifiers in the visible range, from 1960 on, the word Laser was then introduced.

Let's consider a material immersed in radiation; we expect the following behaviours:

a) From the fundamental status of minimum energy E_i , the atom can absorb photons whose frequency is ν , so that $h\nu = E_f - E_i$, where E_f is the energy of the excited state adjacent to E_i .

(a description of the Planck/Einstein equation $E=h\nu$ can be found in the appendix)

At the same time, the electron which absorbs the photon jumps from its fundamental state to the state E_f . This process is called stimulated absorption of radiation.

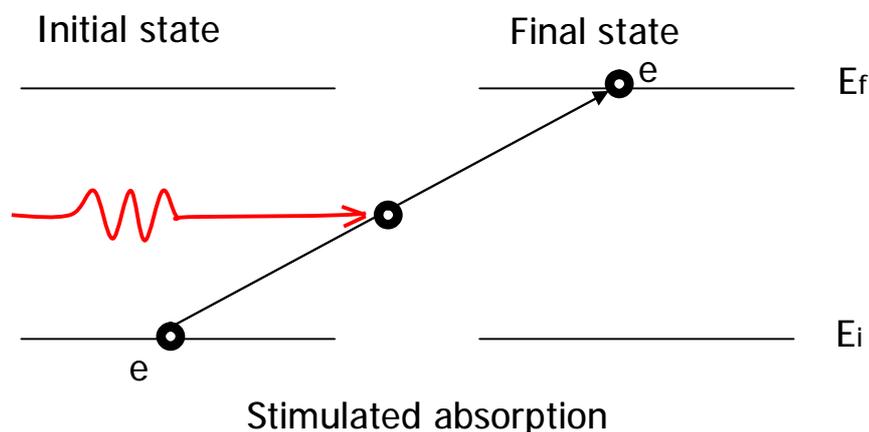
Albert Einstein supposed that the probability per unit of time that this happens is proportional, through a constant, to the energy density of the radiation, at the frequency ν , that is $f(\nu)$ (see Planck's eq. in the appendix); so:

$$R_{if} = B_{if} \cdot f(\nu) ; B_{if} \text{ is the B coefficient of Einstein.}$$

The frequency of the stimulated events with transition $i \rightarrow f$ referred to the unit of volume of the material will be:

$$N_f = n_i \cdot R_{if} = n_i \cdot B_{if} \cdot f(\nu) \quad [1.1]$$

where n_i is the number of atoms, per unit of volume, which are in the fundamental state E_i (population of the fundamental state).

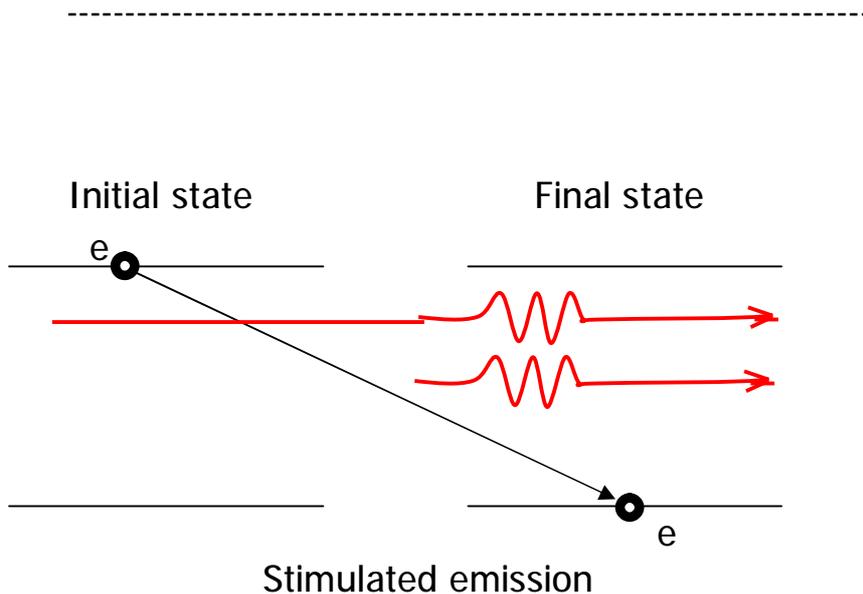
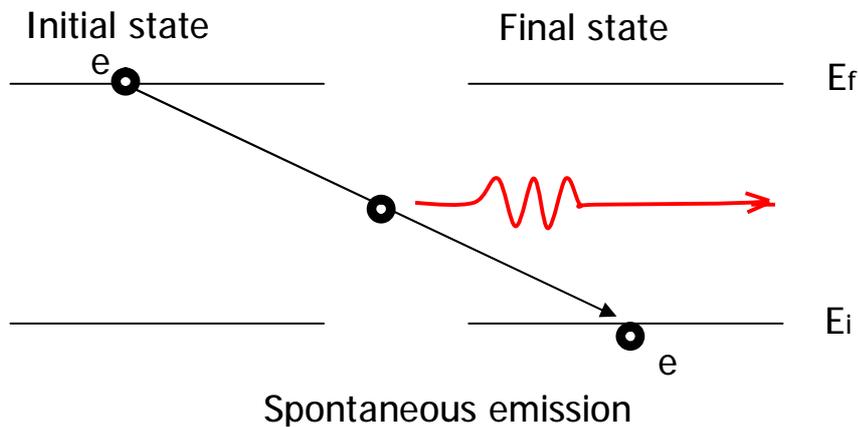


b) Once excited in the final state E_f , the atom tends to fall again in the fundamental state E_i . This can happen through several mechanisms; we are here interested to the following two radiative mechanisms:

-spontaneous emission of a photon, whose frequency is $\nu = (E_f - E_i) / h$ as well. The mean life, per spontaneous emission, of the excited states, can change a lot from state to state: it can be from nanoseconds to milliseconds.

The spontaneous emission is the basis for all the standard light emitters, such as light bulbs.

-stimulated emission, when the atom which is in the excited state is struck from another photon whose frequency is $\nu = (E_f - E_i) / h$. In this case, the return to the initial state happens together with the emission of another photon, which will be together with the striking one and has, with respect to it, the same frequency, the same phase and the same propagation direction.



The probability R_{fi} , per unit of time, that the atom goes back to its fundamental initial state, can be written in this way:

$$R_{fi} = A_{fi} + B_{fi} \cdot f(\nu) ,$$

where A_{fi} is the Einstein's A coefficient, and represents the spontaneous emission term, while $B_{fi} f(n)$ is the stimulated emission term.

We see that the spontaneous emission term does not depend on the radiation $f(n)$, while the stimulated emission one, of course, does, and is proportional to the stimulating radiation density, that is, $f(n)$.

The emission frequency with transition $f \rightarrow i$, just like in the previous case, will be:

$$N_i = n_f \cdot R_{fi} = n_f [A_{fi} + B_{fi} \cdot f(n)] \quad [1.2]$$

where n_f is the population of the excited state.

Let's start supposing that the material and the radiation are at balance. The number of photons emitted per unit of time must so be equal to the number of absorbed photons, that is:

$$N_f = N_i \rightarrow n_i \cdot B_{if} \cdot f(n) = n_f [A_{fi} + B_{fi} \cdot f(n)]$$

Resolving for $f(n)$, we get:

$$f(n) = \frac{A_{fi} / B_{fi}}{(n_i/n_f)(B_{if}/B_{fi}) - 1}$$

At the thermal equilibrium, for the Boltzmann's distribution (see appendix), we have:

$$n_i = n_0 e^{-E_i/kT}, \quad n_f = n_0 e^{-E_f/kT}, \quad n_0 = \text{constant},$$

so:

$$n_i / n_f = e^{-E_i/kT} / e^{-E_f/kT} = e^{(E_f - E_i)/kT} = e^{hn/kT}$$

Therefore, for $f(n)$:

$$f(\mathbf{n}) = \frac{A_{fi} / B_{fi}}{(B_{if} / B_{fi})e^{hn/kT} - 1} \quad [1.3]$$

As, at the thermal equilibrium, we have also Planck's equation on the blackbody emission (vedi appendice):

$$f(\mathbf{n}) = \frac{8phn^3}{c^3} \left(\frac{1}{e^{hn/kT} - 1} \right)$$

we'll have, by comparison, the Einstein's relations:

$$B_{if} / B_{fi} = 1$$

$$A_{fi} / B_{fi} = 8phn^3 / c^3$$

c is the speed of light in vacuum ($c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$).

These relations are necessary to assure the general conditions required at the thermal equilibrium and they have a general validity.

The first one says the B coefficient for the induced emission is equal to that for the induced absorption. The second one says the higher n is the more probable the spontaneous emission is, and so it's so high as high the difference $E_f - E_i$ in energy is.

That's why the making of X-rays Lasers (high n) is so problematic.

By putting $B_{if} = B_{fi}$ in equation [1.3], we get an equation which is valid at the thermal equilibrium and shows the ratio of the probability of a spontaneous decay and that of a stimulated decay:

$$\frac{A_{fi}}{B_{fi} \cdot f(\mathbf{n})} = (e^{hn/kT} - 1) \quad [1.4]$$

At ambient temperature, with a n value in the visible or infrared spectra, $hn \gg kT$, and so such a ratio is $\gg 1$, that is, the spontaneous emission dominates on the stimulated one.

(We remind you that the Boltzmann's constant k is $1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$, while Planck's constant h is $6,625 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$; in order to have an interpretation of such constants, see the appendix).

A Laser is a device in which, through some methods, the populations n_i and n_f of those two states are controlled from the external side, bringing them to values different with respect to those at thermal equilibrium.

More exactly, one makes $n_f > n_i$, i.e., one keeps the population of the excited state higher than that of the fundamental one. We see that for small n (for instance.: microwaves), $hn \ll kT$; therefore, the left side of [1.4] would be small enough; in this situation, the ratio of [1.2] with [1.1] yields:

$$\frac{N_i}{N_f} = \frac{n_f}{n_i} \left(1 + \frac{A_{fi}}{B_{fi} \cdot f(n)} \right) \quad (\text{the expression between brackets} \cong 1)$$

From this formula we see that if $n_f > n_i$, then $N_i > N_f$, so the radiation emitted is higher than the absorbed one.

By suitably shaping the geometry of the material, the radiation due to the stimulated emission is kept in the material, so the density $f(n)$ becomes very high and the stimulated emission will dominate over the spontaneous one.

As with the stimulated emission the photon which is emitted is in phase with the stimulating one, we get a light beam which is monochromatic and very intense, coherent (photons in phase) and collimated.

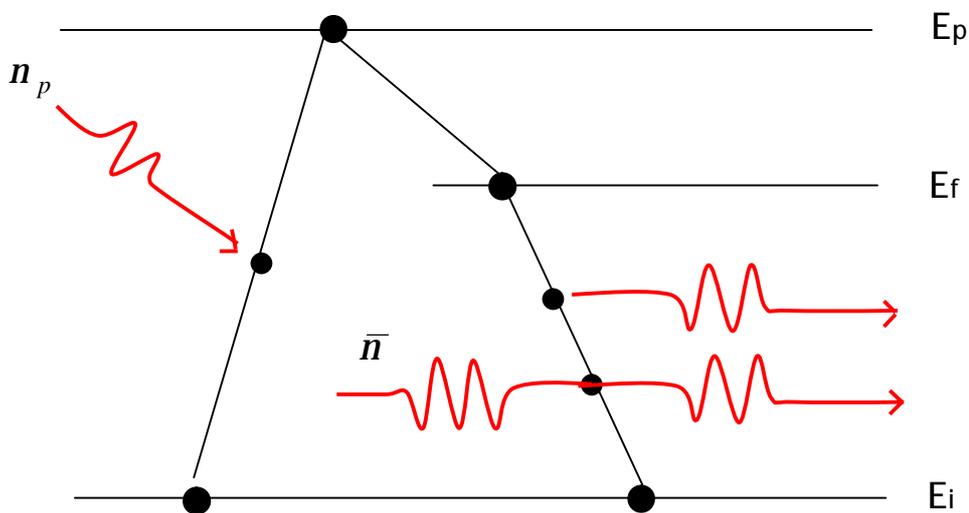
n_f can be held higher than n_i by a pumping (optical, electrical, gasdynamical).

As photons in a Laser beam are all in phase (coherence), their effects (for instance: thermal ones) on a material where it strikes, sum up, so making the well known efficacy of the Laser beam itself.

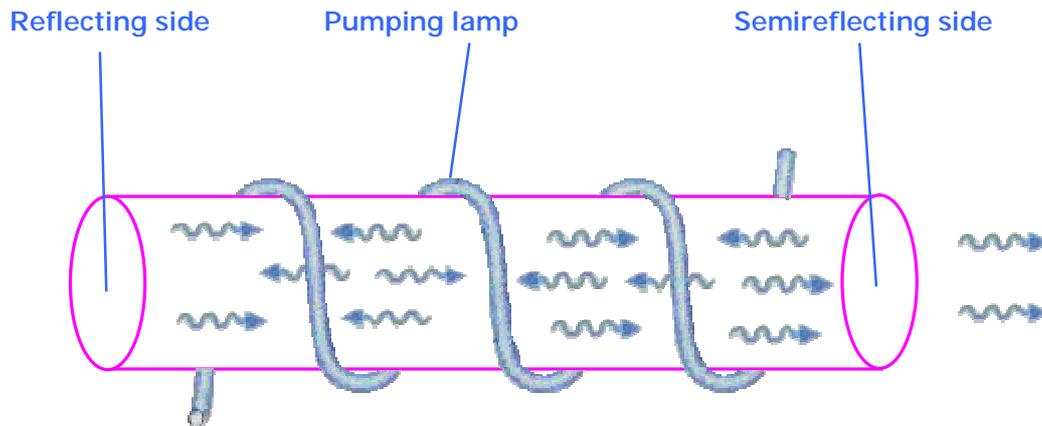
OPTICAL PUMPING:

You choose a material with a state E_f which is metastable, that is, with a long mean life (for instance: $t = 10^{-3} s$) adjacent to a state $E_p > E_f$ with a short mean life (for instance: $t = 10^{-8} s$).

By putting this material under a radiation $n = (E_p - E_i)/h$ (pumping radiation), electronic transitions towards E_p are induced. From there, the electrons spontaneously decay towards the state E_f , and as they have the possibility to stay there for a much longer time, the population can be increased to satisfaction.



AN EXAMPLE OF A RUBY LASER:



The ruby Laser is the first kind of Laser ever built; the ruby is a corundum crystal (Al_2O_3) with impurities of ions Cr^{+++} . Ruby has got a strong absorption band in the green and it's used to make the inversion of population.

Through a strong source of green light (high pressure mercury light), chromium ions are excited to levels whose decay time to a lower level is very short. Such fast transitions are caused by interactions of ions with vibrations of the crystal lattice.

The lower level becomes the active one through the laser action which takes place at a wavelength of 694,3 nm.

The ruby crystal has got a cylindrical shape; one base is mirror-like, while the other is semi mirror-like. Despite photons out of the axis, which can get out of the cylinder side surface, the other photons moving along the axis make a long travel in the crystal, and so they have a high probability to activate a stimulated emission in the crystal, so multiplying the presence of photons all in phase and collimated.

Around the crystal, a spiral shaped lamp provides for the optical pumping; for the ruby, the pumping radiation frequency is $\nu = 5,455 \cdot 10^{14}$ Hz. From the semi mirror-like side a coherent and collimated beam comes out and its frequency is $4,321 \cdot 10^{14}$ Hz.

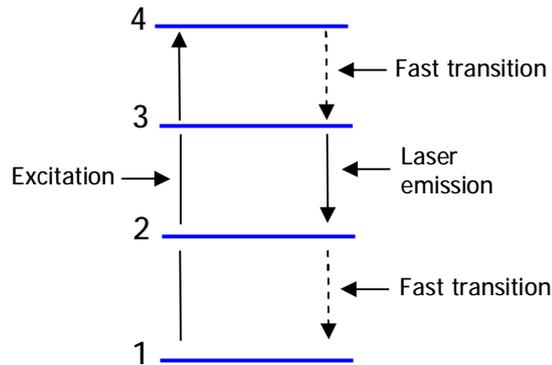
PUMPING METHODS:

- optical pumping by standard sources (incandescent lamps, gas discharge, flash, Sun, etc), with Light Emitting Diodes or other Lasers.
- pumping through radiofrequency.
- pumping through electric discharge, if the material is a gas.
- pumping of solid material by collisions with electrons.
- chemical separation in excited states (chemical Lasers).
- thermodynamical processes (for instance: fast gas expansion).

KINDS OF LASERS:

The ruby Laser just described works on three levels $E_i(1)$, $E_f(2)$ and $E_p(3)$, and so is a three level one, and the cycle is 1-----3 -----2. There are also Lasers working on four levels, in which level E_f is enriched by the transition 4-----3 from E_p to E_f , and,

simultaneously, level E_i is impoverished 2-----1 to a lower level. Four level Laser has got an efficiency higher than that of the three level one.



One of the most common gas Lasers is the He-Ne one and oscillates at the wavelength of 632,8 nm.

The Laser action takes place among the neon atom levels, while helium is used in the active mean to facilitate the pumping process.

For what the excitation method (pumping) is concerned, an electric discharge is held in the low pressure helium neon mixture; because of collisions among electrons and ions, also some metastable helium levels are populated, that is, those which have a very low probability to decay to lower levels. The population of those states becomes not negligible and, through collisions, their energy can be transferred to the neon atoms, in order to excite some proper levels. Therefore, the method of the inversion, in this case, is the following: population of a higher state of neon, through selected collisions; emptying, through transitions, towards the lower state; electric energy which is transformed directly into luminous energy.

We point out that the He-Ne Laser can work not only at the standard wavelength of 632,8 nm, typical of all commercial Lasers, but also at further wavelengths, in the visible range (for instance: 612 nm) , as well as in the infrared one (for instance: 1,15 μm , 3,39 μm).

Among Lasers working with a liquid active mean, the most known are the organic colouring matters.

Usually, it's about solutions of rhodamine, coumarin or similar substances, in water, alcohol or other suitable solvents. The molecules of colouring matters have a very complex structure, with a high density of energy levels. This permits a lot of transitions, so that the Laser emission can cover wide frequency bands, around 30/40 nm in λ . The working layout is a four level kind; the excitation at the highest state is obtained through flash lamps or through other visible Lasers, while the mean fast transitions are assured by strong interactions in liquids. The main interest to these Lasers is the possibility to have an emission tunable in frequency.

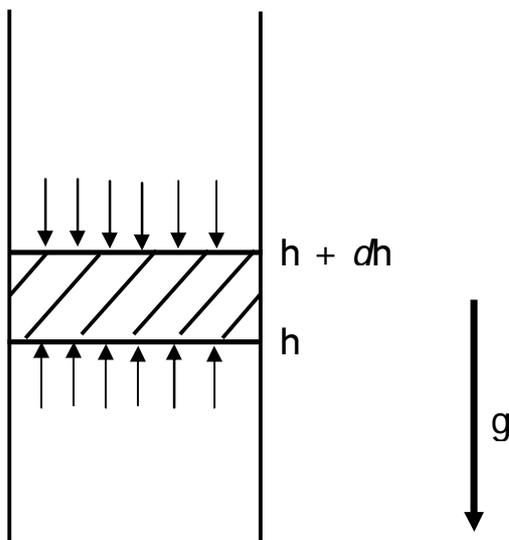
There are also many Lasers working on a pulsed basis, in which the inversion of population can be made for very short times, so that the emission, too, lasts just some nanoseconds. Among those, we remind you of some gas Lasers, like nitrogen Lasers, and excimer Lasers, that is, molecules made of halide of noble gases.

APPENDIX:

A) Boltzmann's Distribution Law:

Now we try to understand how changes, in a material, the number of molecules per unit of volume, when the energy changes.

Suppose to have a column of gas at a constant temperature, in a container and under the effect of the gravitational field.



If this container has a volume V in which we have N gas particles, we define n as the number of particles per unit of volume.

With reference to the above figure, we examine a section S of the column of gas at the height h . The pressure P_h at the height h is obviously higher than that at the height $h + dh$, as at h the mass of gas pushing downwards is higher.

Being pressure P defined as $dF/dS = (\text{weight of the disc } dh \text{ high and section } S) / S$, we have:

$$P_{h+dh} - P_h = dP = \frac{-m \cdot n \cdot S \cdot dh \cdot g}{S} = -mgndh, \quad [\text{A.1}]$$

where m is the mass of every single particle of gas, n is the number of particles per unit of volume, $S \, dh$ is the volume of the disc, g is the gravitational acceleration and the negative sign tells us that dP is negative (P goes down while we go up).

We also know from thermodynamics that:

$$PV = n_{\text{kmoles}} RT = n_{\text{kmoles}} N_A \cdot \frac{R}{N_A} T = N \cdot k \cdot T, \quad [\text{A.2}]$$

where the first equality is the law of ideal gases ($R=\text{const}$), N_A is the number of particles in a kilomole, i.e. the Number of Avogadro, $N = n_{\text{kmoles}} N_A$ is the total number of gas particles (made of n_{kmoles}) and $k=R/N_A$ is the Boltzmann's constant.

For a proof of the equation of state of ideal gases, see any of the books of general Physics.

From the previous equation, we have:

$$P = \frac{N}{V} kT = nkT.$$

By differentiating this equation, we get:

$$dP = dnkT \quad [\text{A.3}]$$

By eq. [A.1] and [A.3], we have:

$$\frac{dn}{n} = -\frac{mg}{kT} dh = -\frac{dE_p}{kT},$$

where $dE_p = mgdh$ is the differential of the potential energy of every particle.

The integration of this differential equation easily yields the following result:

$$n = n_0 e^{-E_p / kT}, \quad [\text{A.4}]$$

where n_0 is constant.

In case the particles are subject not to the gravitational field, but to any other conservative force, F_i (for instance, the intermolecular forces themselves), which we suppose it is oriented along x , in [A.4], instead of the potential energy E_p , we'll have the corresponding potential energy E_i coming from the force F_i , that is:

$$E_i = -\int F_i \cdot dx.$$

Finally:

$$n = n_0 e^{-E_i / kT} \quad [\text{A.5}]$$

The situation with non conservative forces is here not taken into account, as in this case it wouldn't be even possible to claim the thermal equilibrium.

In our opinion, the Boltzmann's equation [A.5] can be considered as proved and we want to remind you of what it means:

the probability to find molecules in a certain spatial disposition changes exponentially with the opposite of the potential energy of that disposition, divided by kT .

The same equation can be extended to our Laser on populations of energy levels.

B) Planck's Blackbody Spectrum:

Let's consider a cavity whose sides are at temperature T , uniform and constant.

Microscopic charges which makes the sides move because of the thermal agitation and, so doing, they radiate electromagnetic waves which fill the cavity; there is an energy transfer from the cavity sides to the electromagnetic field. Simultaneously, electromagnetic waves move into the cavity and hit the sides; so doing, they transfer energy from the field to the cavity sides. An equilibrium is so settled.

The **blackbody radiation spectrum** is the function $f(n)$ so that $f(n)dn$ is the *energy* had by the electromagnetic field in the unity of volume of the cavity, and with frequency between n and $n + dn$, that is:

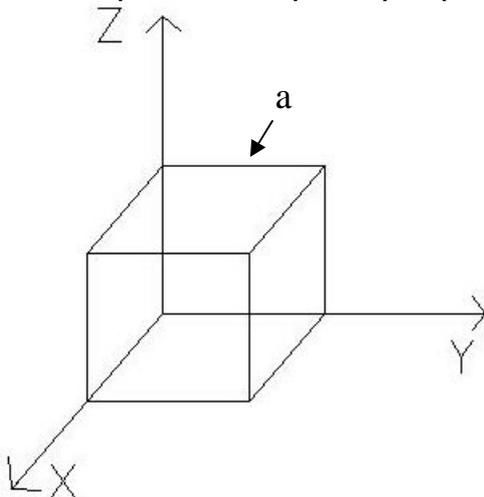
$$f(n)dn = du \quad [J / m^3]$$

Cavity sides emit and absorb radiation and can be held as made by small oscillating dipole. Moreover, we can assign the radiation in the cavity two degrees of freedom corresponding to two polarization planes which are perpendicular and independent each other and on which every electromagnetic wave can oscillate; in simpler words, an electromagnetic wave which propagates along z can oscillate transversally on both planes zx and zy .

We know from the kinetic theory of gases that for every particle, and so for every em wave emitted by the particles, and for every degree of freedom we can assign an energy equal to twice $\frac{1}{2}kT$, that is kT , as the total energy is made of a kinetic part and a potential part and their mean values are the same (see [A.12]).

For a proof of the fact that the total energy to be conferred is really $kT/\text{degree of freedom}$ see any of the available general Physics books.

Now, suppose we have, out of simplicity, a cubic cavity whose electromagnetic radiation propagates along the three axis, so generating standing waves; moreover, we consider just one polarization plane per propagation axis (y), and we'll later take into account the



real existence of two degrees of freedom.

As the cavity is place of standing waves, and considering the x axis as the propagation one, we will write the following equation for a standing wave (see [A.13]):

$E_y(x,t) = E_{oy} \sin(kx) \cdot \sin(2pnt)$, k is the wave number = $2p/l$ and l is the wavelength.

We remind that : $c = ln$, and: $w = 2p/T = 2pn$.

As the standing wave must be zero in $x = 0$ and in $x = a$, we have:

$$ka = np \rightarrow n = 2a/l \rightarrow n = \frac{c}{l} = \frac{c \cdot n}{2a}.$$

n is positive and not zero, otherwise we don't have any wave.

In general, for a wave propagating along a random direction, we have, component by component:

$$\begin{aligned} E_y(x,t) &= E_{oy} \sin(k_x x) \cdot \sin(2pnt) & k_x &= (2p/l) \cdot \cos a \\ E_z(y,t) &= E_{oz} \sin(k_y y) \cdot \sin(2pnt) & k_y &= (2p/l) \cdot \cos b \\ E_x(z,t) &= E_{ox} \sin(k_z z) \cdot \sin(2pnt) & k_z &= (2p/l) \cdot \cos g \end{aligned}$$

where the three direction cosines are the components of the versor \hat{k} which indicates the direction of propagation of the wave.

Still by analogy with the single dimension case, we have:

$$\begin{aligned} k_x a &= n_x p & \rightarrow (2a/l) \cos a &= n_x \\ k_y a &= n_y p & \rightarrow (2a/l) \cos b &= n_y \\ k_z a &= n_z p & \rightarrow (2a/l) \cos g &= n_z \end{aligned}$$

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = (2a/l)^2 (\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 g) = 4a^2 / l^2,$$

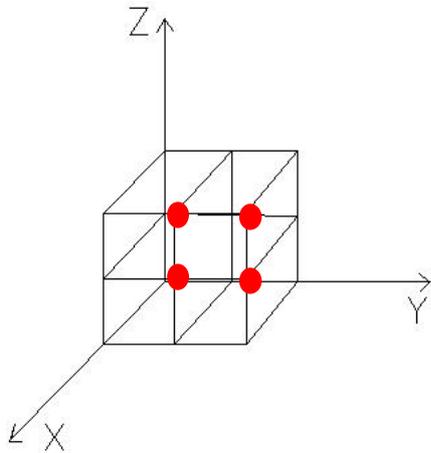
from which:

$$n = \frac{c}{l} = \frac{c}{2a} \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} \quad \text{[A.6]}$$

With all values of n , we have all possible ways of vibration.

If we put such values n_x , n_y , n_z on three axes and considering the example

$n_x, n_y, n_z = (1, 2, 2)$, we see that the number of possible vibrations corresponding to terns n_x, n_y, n_z ($n_x, n_y, n_z \neq 0$, or we have a singularity case) are the vertexes of the following graph, where the n values are different from zero, so they are all the red spots.



The fundamental thing we must take into account now (and this has a general validity) is that such possible ways of vibration (●) correspond, in number, to the small unit side cubes (which are four, too).

So: n . of possible ways of vibration = total volume V located by the tern n_x , n_y , n_z .

The radical in the expression [A.6] is just the radius of an octant of sphere located by the three components n_x , n_y , n_z (of course, we consider just the octant where n_x , n_y , n_z are positive, as those must be positive and not zero).

The last remark makes us use the more suitable polar coordinates:

as the volume of an octant of a sphere is equal to $\frac{1}{8} \frac{4}{3} p \cdot r^3$, the number N of modes of possible vibrations for a value of r between 0 and r is:

$$N = \frac{1}{8} \frac{4}{3} p \cdot r^3 .$$

As a consequence, the number $N(r) dr$ of possible modes of vibration for a value of r between r and $r + dr$ can be obtained by differentiating the previous equation:

$$N(r)dr = \frac{p}{2} r^2 dr .$$

Now, let's define an $N(n)$ so that $N(r)dr = N(n)dn$ = number of possible modes of vibration for frequencies between n and $n + dn$; we see that, according to [A.6], $n = r c / (2 a)$, and by differentiating the last equation, we have:

$$dn = \frac{c}{2a} dr ; \text{ and then we get:}$$

$$N(n)dn = \frac{p}{2} \left(\frac{2a}{c} \right)^3 n^2 dn = \frac{4p}{c^3} V n^2 dn , \text{ where } V = a^3 = \text{volume of the cavity.}$$

Now, in order to pass from the previous equation to $f(n)$, and remembering that, according to the definition of $f(n)$ itself we gave before, we have to:

-divide by V to refer to the unity of volume

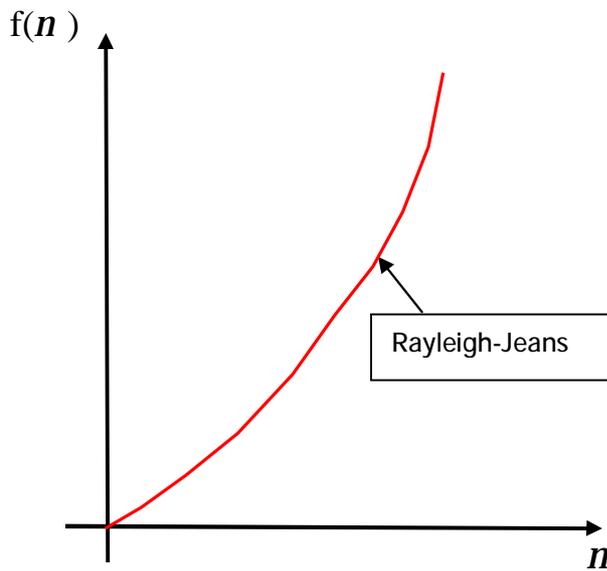
-multiply by two to take into account the two possible states of polarization of the radiation (as well as we promised on the bottom of page 29/36)
 -multiply by kT , that is, by the mean energy corresponding to each degree of freedom.
 Therefore:

$$f(n)dn = \frac{8p}{c^3} kTn^2 dn \quad , \quad [A.7]$$

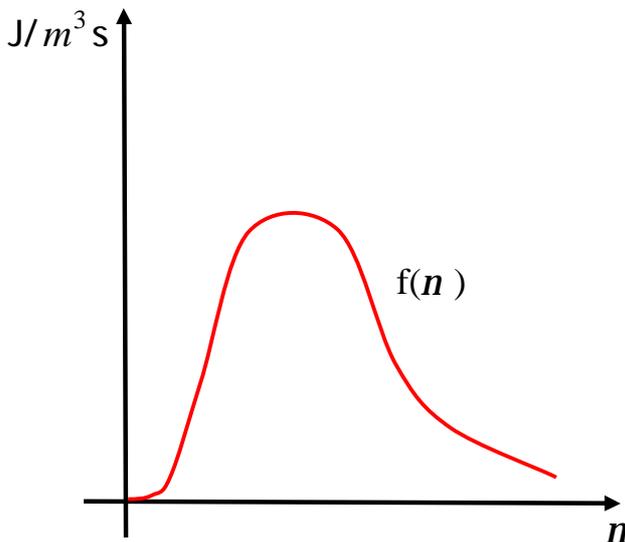
and this equation is known to be the Rayleigh-Jeans equation.
 Of course:

$$f(n) = \frac{8p}{c^3} kTn^2$$

The graph of this equation is here below:



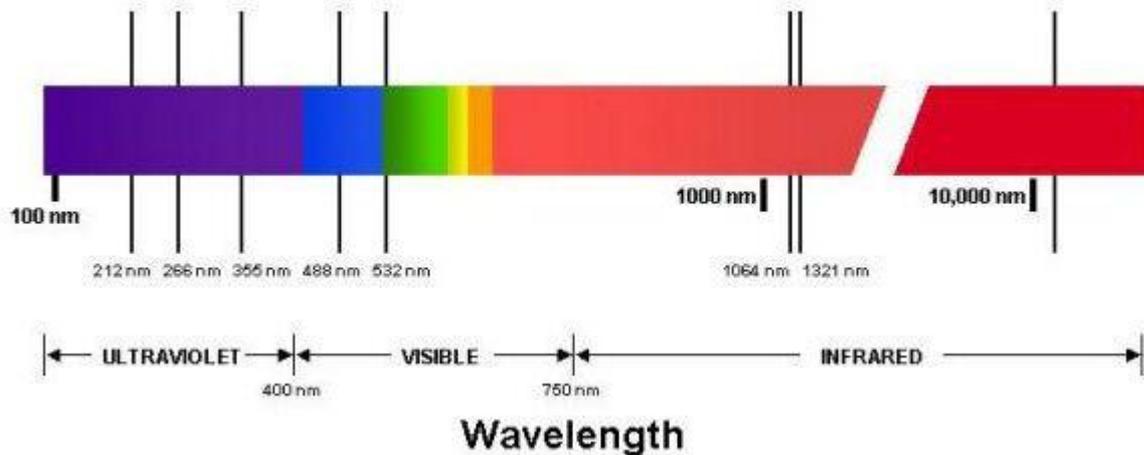
The experiments, on the contrary, show a different behaviour:



In the real situations, there is a peak, that is a value of frequency around which the emission of the blackbody concentrates.
 Of course, the above curve is for a fixed temperature T and we'll see the more the temperature increases, the higher the frequency values are.

That's why, for instance, a piece of iron at ambient temperature emits an electromagnetic radiation in the range of the infrared waves, or around it, while if you heat it, it will emit visible radiation, at temperatures around some hundreds of centigrade degrees (white heat, red heat).

Similarly, you can find many characteristics of the surface of a star by just studying the frequency spectrum of the light the star irradiates.



Nothing similar is shown by the Rayleigh-Jeans graph, which leads to an ultraviolet catastrophe. All this was the beginning of the crisis of classic physics, and there was the need to bring new ideas and quantum hypotheses to make the theoretical deductions match the reality; as an example, we bring the Max Planck's supposition:

first of all, we see that if we want to figure out the mean energy \bar{E} among all energies of the elements of a system, we can carry out a weighed average of all energies, which are distributed according to the already proved Boltzmann's formula [A.5] for $n(E)$; therefore:

$$\bar{E} = \frac{\sum E_i \cdot n(E_i)}{\sum n(E_i)} = \frac{\sum E_i \cdot n_0 e^{-E_i/kT}}{\sum n_0 e^{-E_i/kT}} = \frac{\sum E_i \cdot e^{-E_i/kT}}{\sum e^{-E_i/kT}} ; \quad [\text{A.8}]$$

the numerator is the sum of all energies and each of them is weighed according to the number of components which have it, while the denominator is the total number of particles. For the moment, such an average value should be kT , and this is exactly the energy value we conferred to every constituent.

In order to jump from the Rayleigh-Jeans equation to one whose graph is that of the Planck's blackbody above reported, Planck supposed that for every value of frequency n , the energy of the system could have just discrete (quantized!) values:

$$E = hn, 2hn, \dots, nhn \quad , (n \text{ integer}). \quad [\text{Planck/Einstein equation}]$$

By such an assumption, [A.8] becomes (summation over n):

$$\bar{E} = \frac{\sum_0^{\infty} nhn \cdot e^{-nhn/kT}}{\sum_0^{\infty} e^{-nhn/kT}} .$$

The result is:

$$\bar{E} = \frac{hn}{e^{hn/kT} - 1};$$

In fact, by assuming that $\frac{hn}{kT} = z$, we have: $\bar{E} = kT \frac{\sum_0^{\infty} nz \cdot e^{-nz}}{\sum_0^{\infty} e^{-nz}}$; by defining:

$$f(z) = \sum_0^{\infty} e^{-nz}, \text{ we have:}$$

$$-z \cdot df/dz = z \sum_0^{\infty} n \cdot e^{-nz} = \sum_0^{\infty} nz \cdot e^{-nz}, \text{ so:}$$

$$\bar{E} = -kTz \frac{df/dz}{f} = -kTz \frac{d}{dz} \ln z = -kTz \frac{d}{dz} \ln \sum_0^{\infty} e^{-nz}.$$

Now, for Taylor's series, or for the study on geometrical series:

$$\sum_0^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \text{ and if we say: } e^{-z} = x, \text{ we have:}$$

$$\bar{E} = -kTz \frac{d}{dz} \ln(1 - e^{-z})^{-1} = -kTz \frac{1}{(1 - e^{-z})^{-1}} (1 - e^{-z})^{-2} e^{-z} = kTz \frac{e^{-z}}{1 - e^{-z}} = \frac{kTz}{e^z - 1} = \frac{hn}{e^{hn/kT} - 1}$$

that is, the assumption, after that we have taken into account the expression for z.

Therefore, Planck's news was to put in Rayleigh-Jeans' equation [A.7], the value of \bar{E} , just found, instead of the mean energy per component, that is, kT:

$$f(n)dn = \frac{8pn^2}{c^3} \frac{hn}{e^{hn/kT} - 1} dn \quad \text{[A.9]}$$

and this is really the Planck's equation.

By dividing both sides by dn , we get an expression for $f(n)$ which excellently describes the experimental graph above reported on the blackbody emission.

C)The Linear Armonic Oscillator

We consider a mass fixed to one end of a spring; the other end is fixed to a wall.

When the mass starts oscillating, as $F=ma$ and, by Hooke, $F=-kx$, we can write the following differential equation:

$$ma + kx = m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0, \text{ whose solution is:}$$

$$x = x_0 \sin(\omega t + \phi), \quad [\text{A.10}]$$

$$\text{where } \omega = \sqrt{k/m}.$$

Now, we write the expression for the total energy E (which is the sum of the kinetic energy with the elastic potential one) of such an oscillating mass:

$$\frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} kx^2 = E = E_k + E_p; \quad [\text{A.11}]$$

This is true because:

$$E_p = -\int F \cdot dx = \int kx \cdot dx = \frac{1}{2} kx^2.$$

Using [A.10] in [A.11] and taking into account the expression for ω , we get:

$$\begin{aligned} E &= \frac{m}{2} \omega^2 x_0^2 \cos^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2} kx_0^2 \sin^2(\omega t + \phi) = \\ &= \frac{1}{2} kx_0^2 [\cos^2(\omega t + \phi) + \sin^2(\omega t + \phi)] = \frac{1}{2} kx_0^2 \end{aligned} \quad [\text{A.12}]$$

As, from the previous expression, kinetic and potential components are the same, we have justified the reason why we assigned two identical values $(1/2)kT$ for the total energy of the oscillators in the cavity (see page 29/36).

D) Standing Waves

If a wave S_1 propagates in a limited mean, the superposition of it with its reflected one S_2 generates a standing wave S :

$$S_1 = A \sin(kx - \omega t), \quad S_2 = A \sin(kx + \omega t).$$

The difference in sign in the arguments is due to the fact that those waves propagate in opposite directions; moreover, the term $\omega t = 2\pi nt$ tells us that if we fix a point x , we have an oscillation in time, while the term kx tells us that, if we fix a time t , we see an oscillation by moving along x .

Therefore, a propagating wave oscillates in time and also along the space through which it's propagating indeed.

$$S = S_1 + S_2 = 2A \cdot \sin kx \cdot \cos \omega t = 2A \cdot \sin \frac{2p}{l} x \cdot \cos 2pnt ; \quad [\text{A.13}]$$

after that we take into account the following trigonometric equality:

$$\sin a + \sin b = 2 \cos \frac{(a-b)}{2} \cdot \sin \frac{(a+b)}{2} .$$

Bibliography:

- 1) (*C. Mencuccini-V. Silvestrini*) FISICA II, Elettromagnetismo-Ottica , Liguori Editore.
- 2) (*Alonso-Finn*) FUNDAMENTAL UNIVERSITY PHYSICS III, Quantum and Statistical Physics , Addison-Wesley.
- 3) (*Lionel Lovitch-Sergio Rosati*) FISICA GENERALE, Elettricità, Magnetismo, Elettromagnetismo, Relatività Ristretta, Ottica, Meccanica Quantistica , 3[^] Edizione; Casa Editrice Ambrosiana-Milano.
- 4) (*Richard P. Feynman*) FEYNMAN PHYSICS 1 , Mechanics, Radiation, Heat; Zanichelli.