



For the English version see below, after the Italian one.



EQUAZIONE DI NAVIER-STOKES:

La regina della fluidodinamica.

Una dimostrazione semplice, ma completa.

di Leonardo Rubino

Settembre 2010 – Rev. 00

Equazione di Navier-Stokes nel caso di fluido incompressibile, cioè con $r = \text{const}$ e $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$:

(questa situazione abbraccia la maggioranza dei casi)

$$r \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{r} \times \mathbf{v} + \frac{1}{2} \nabla v^2 \right] = -\nabla p - r \nabla f + \eta \nabla^2 \mathbf{v} \quad \text{con} \quad \nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{\Omega} \quad (\text{vorticità}), \quad \eta \quad (\text{viscosità}),$$

f (potenziale gravitazionale), ρ (densità), \mathbf{v} (velocità), t (tempo).

Dimostrazione:

-partiamo dall'Equazione di Continuità $\frac{\partial r}{\partial t} + \nabla \cdot (r \mathbf{v}) = 0$, di cui diamo prova:

$r \mathbf{v} = \mathbf{j}$ è la densità di corrente di massa $[\frac{kg}{s}]$ (dimensionalmente ovvia)

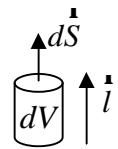
$$M = \int_V r \cdot dV \quad (\text{ritenuta ovvia})$$

Si ha: $\frac{\partial}{\partial t} M = \frac{\partial}{\partial t} \int_V r \cdot dV = \int_V \frac{\partial r}{\partial t} \cdot dV = - \int_S r \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$, infatti, a livello dimensionale:

$dV = \mathbf{l} \cdot d\mathbf{S}$ e quindi $\frac{\partial}{\partial t} dV = d\mathbf{S} \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial t} = d\mathbf{S} \cdot \mathbf{v}$ ed il segno – si ha in caso di massa che “esce”.

Dunque: $\int_V \frac{\partial r}{\partial t} dV = - \int_S (r \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{S} = - \int_V \nabla \cdot (r \mathbf{v}) \cdot dV$, avendo usato il Teorema della Divergenza nell'ultima eguaglianza.

Quindi: $\int_V \left[\frac{\partial r}{\partial t} + \nabla \cdot (r \mathbf{v}) \right] dV = 0$, da cui appunto l'Eq. Di Continuità.



-e partiamo anche dall'Equazione di Eulero ($\frac{\partial \dot{\mathbf{v}}}{\partial t} + (\dot{\mathbf{v}} \cdot \dot{\nabla}) \dot{\mathbf{v}} = -\frac{\dot{\nabla} p}{r}$), di cui anche diamo

prova:

(p è la pressione; inoltre, la stessa è un primo abbozzo di Equazione di Navier-Stokes, dove però non si tiene ancora conto del campo gravitazionale e delle forze viscosse)

La forza agente su un volumetto di fluido dV è $d\dot{f} = -p \cdot d\dot{S}$, con il segno -, in quanto consideriamo una forza verso il volumetto. Inoltre:

$\dot{f} = -\int_S p \cdot d\dot{S} = -\int_V \dot{\nabla} p \cdot dV$, dopo aver usato un duale del Teorema della Divergenza (formula di Green), per passare dall'integrale di superficie a quello di volume.

Abbiamo poi che: $\frac{\partial \dot{f}}{\partial V} = \frac{\partial}{\partial V} [-\int_V \dot{\nabla} p \cdot dV] = -\dot{\nabla} p$, ma è contemporaneamente vero che, a livello dimensionale:

$$\frac{\partial \dot{f}}{\partial V} = \frac{d}{dV} [M \frac{d\dot{v}}{dt}] = \frac{dM}{dV} \frac{d\dot{v}}{dt} = r \frac{d\dot{v}}{dt} \quad \text{e dalle due si ha:}$$

$$r \frac{d\dot{v}}{dt} = -\dot{\nabla} p. \quad (1.1)$$

Ricordando ora che: $d\dot{l} = (dx, dy, dz)$, $\dot{\nabla} = (\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dz})$ e $\dot{\mathbf{v}} = (\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt})$, possiamo

banalmente scrivere che:

$$\frac{d\dot{v}}{dt} = \frac{\partial \dot{v}}{\partial t} + \frac{\partial \dot{v}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \dot{v}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \dot{v}}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial \dot{v}}{\partial t} + (\dot{\mathbf{v}} \cdot \dot{\nabla}) \dot{\mathbf{v}} = \frac{d\dot{v}}{dt} \quad \text{e per la (1.1) si ha infine che:}$$

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{v}}}{\partial t} + (\dot{\mathbf{v}} \cdot \dot{\nabla}) \dot{\mathbf{v}} = -\frac{\dot{\nabla} p}{r} \quad \text{e cioè l'Eq. Di Eulero appunto.}$$

Ora, i termini di questa Equazione di Eulero hanno proprio le dimensioni di un'accelerazione \dot{a} ; dunque, volendo tener conto anche del campo gravitazionale, a secondo membro si può sommare algebricamente l'accelerazione di gravità $\dot{\mathbf{g}}$, con il segno meno, poiché la stessa è rivolta verso il basso.

Sappiamo però dalla gravitazione che il gradiente del potenziale f è proprio $\dot{\mathbf{g}}$ ($\dot{\nabla} f = \dot{\mathbf{g}}$), da cui, dunque:

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{v}}}{\partial t} + (\dot{\mathbf{v}} \cdot \dot{\nabla}) \dot{\mathbf{v}} = -\frac{\dot{\nabla} p}{r} - \dot{\nabla} f. \quad \text{Valendo ora la seguente identità vettoriale:}$$

$$(\dot{\mathbf{v}} \cdot \dot{\nabla}) \dot{\mathbf{v}} = (\dot{\nabla} \times \dot{\mathbf{v}}) \times \dot{\mathbf{v}} + \frac{1}{2} \dot{\nabla} (\dot{\mathbf{v}} \cdot \dot{\mathbf{v}}), \quad \text{e ricordando l'espressione per la vorticità di pagina 1}$$

$$(\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \dot{\nabla} \times \dot{\mathbf{v}}), \quad \text{si ha:}$$

$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r} + \frac{1}{2} \nabla v^2 = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla f$ e sin qui abbiamo dunque tenuto conto anche del campo gravitazionale.

Nel caso più generale in cui si abbia a che fare con un fluido viscoso, andrà aggiunta una componente di forza viscosa:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r} + \frac{1}{2} \nabla v^2 = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla f + \frac{\mathbf{f}_{visc}}{\rho} \quad (1.2)$$

dove la \mathbf{f}_{visc} compare divisa per la densità per una questione di compatibilità dimensionale con gli altri termini nell'equazione.

La (1.2) è già l'Equazione di Navier-Stokes, dove però ci manca ancora di valutare la forza viscosa \mathbf{f}_{visc} .

Noi valuteremo \mathbf{f}_{visc} nel caso di fluidi incompressibili, cioè fluidi per cui $\rho = const$, $\gg \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

da cui, per l'Equazione di Continuità, $\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$, $\gg \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$.

Calcolo di \mathbf{f}_{visc} :

VISCOSITA':

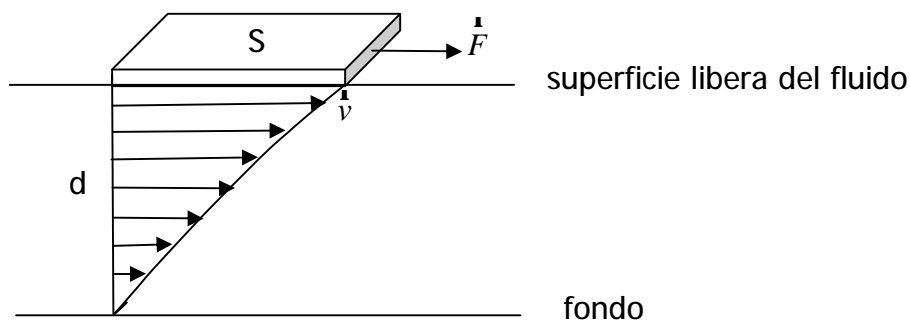


Fig. 1.

Sappiamo dalla fisica generale che: $\frac{\mathbf{F}}{S} = h \frac{\mathbf{v}}{d}$, (1.3)

e cioè, per trascinare la lastra di area di base S sul fluido, a distanza d dal fondo, e per trascinarla con velocità \mathbf{v} , serve una forza \mathbf{F} .

Scriviamo ora la (1.3) in forma differenziale, per sforzi \mathbf{t} e per componenti: (x)

$$t_x = \frac{F_x}{S} = h \frac{\partial u}{\partial y}, \text{ avendo posto } \mathbf{v} = (u, v, w), \text{ e dunque:}$$

$$F_x = h \frac{\partial u}{\partial y} \cdot S \quad (1.4)$$

Applichiamo ora la (1.4) ad un volumetto di fluido dV di Fig. 2:

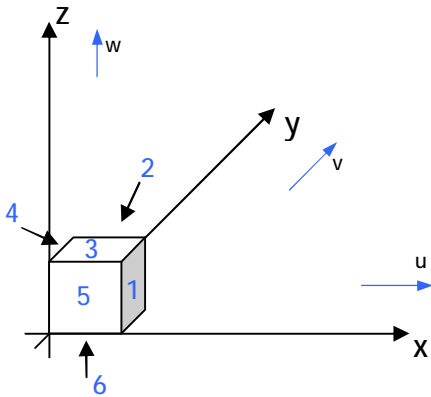


Fig. 2: Volumetto di fluido dV .

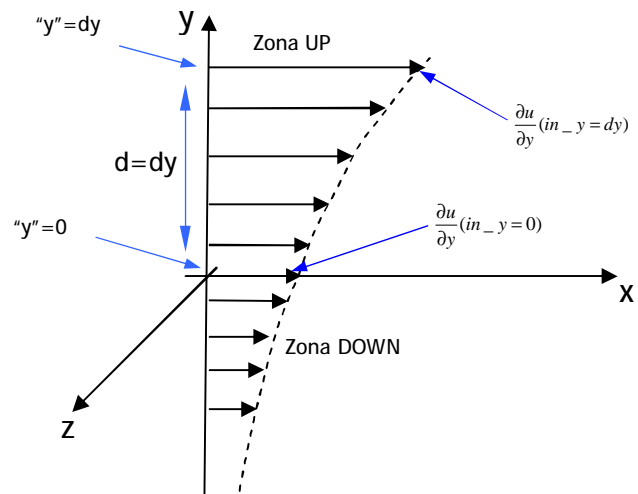


Fig. 3: Asse y , facce 2 e 5.

In Fig. 3 abbiamo riportato quanto esposto in Fig. 1, ma in un contesto tridimensionale.

Facce 2 e 5:

Con riferimento dunque alla Fig. 3, valutiamo le forze viscosi (dovute alle variazioni di u) sulle facce 2 e 5 del volumetto, quelle cioè che si incontrano muovendosi lungo l'asse y , applicando la (1.4):

Sforzo di taglio viscoso sulla faccia 2 $= +h \left[\frac{\partial u}{\partial y} (in _ y = dy) \right] dx dz$

$\frac{\partial u}{\partial y}$ (circled in red) \rightarrow $\frac{v}{d}$ della (1.3)
 $dx dz$ (circled in red) \rightarrow S della (1.3)

Questa forza agente sulla faccia 2 è positiva (+) perché il fluido che è al disopra del punto in cui la stessa viene calcolata (zona UP) ha una velocità maggiore (freccie orizzontali più lunghe) che trascina S lungo la x positiva.

Sulla faccia 5, invece, si avrà il segno (-), in quanto il fluido al disotto di tale S ha velocità più bassa (down) e vuole essere trascinato, determinando una resistenza, cioè una forza negativa:

Sforzo di taglio viscoso sulla faccia 5 $= -h \left[\frac{\partial u}{\partial y} (in _ y = 0) \right] dx dz$

La risultante lungo x è data dalla differenza delle entità delle due, o meglio, dalla somma algebrica:

$$F_{x(y)} = h \left[\frac{\partial u}{\partial y} (y = dy) - \frac{\partial u}{\partial y} (y = 0) \right] dx dz = h \frac{\left[\frac{\partial u}{\partial y} (y = dy) - \frac{\partial u}{\partial y} (y = 0) \right]}{dy} dx dy dz = h \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dV, \text{ dopo aver}$$

moltiplicato numeratore e denominatore per dy . Dunque:

$$F_{x(y)} = h \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dV \quad (\text{forza viscosa su } x \text{ dovuta alla variazione di } u \text{ lungo } y) \quad (1.5)$$

Facce 3 e 6:

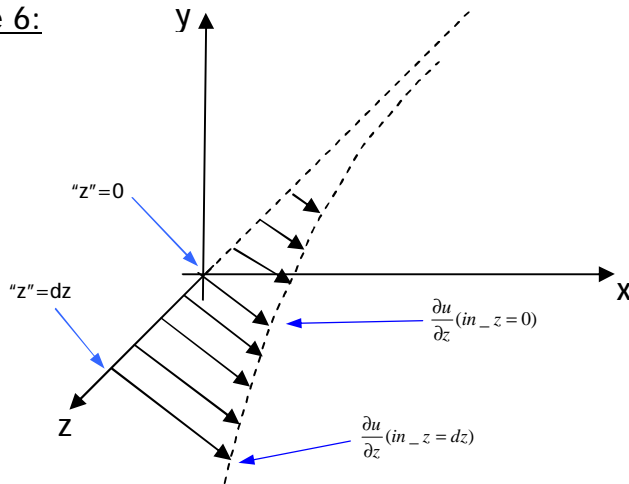


Fig. 4: Asse z, facce 3 e 6.

In analogia con il caso precedente, si ha come risultato:

$$F_{x(z)} = h \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dV \quad (\text{forza viscosa su } x \text{ dovuta alla variazione di } u \text{ lungo } z) \quad (1.6)$$

Facce 1 e 4:

Per quanto riguarda il caso $F_{x(x)}$, e cioè della forza viscosa su x dovuta alla variazione di u (che è una componente su x) lungo x stessa, non si parlerà di sforzo di taglio, in quanto, in questo caso, la forza in questione è sempre lungo x, ma agisce su $S=dydz$, che è ortogonale ad x; si tratta dunque di una forza NORMALE, di trazione/compressione, e si fa riferimento alla Fig. 5 qui sotto:

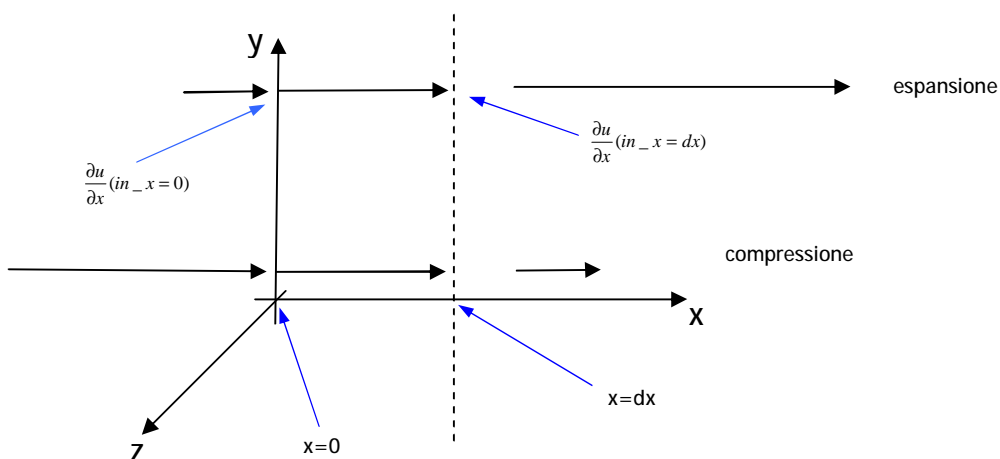


Fig. 5: Asse x, facce 1 e 4.

In ogni caso, nulla cambia analiticamente, rispetto ai casi precedenti, e si ha:

$$F_{x(x)} = h \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dV \quad (\text{forza viscosa su } x \text{ dovuta alla variazione di } u \text{ lungo } x \text{ stessa}) \quad (1.7)$$

Ora che abbiamo le tre componenti delle forze viscosi agenti lungo x (e cioè quelle dovute alla variazione della componente u (comp. x) della velocità \mathbf{v} , rispetto ad y , z ed x stessa), sommiamole ed otteniamo F_{x-visc} :

$$F_{x-visc} = h \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dV + h \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dV + h \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dV = h \cdot dV \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = h \cdot dV \cdot \nabla^2 u, \text{ che riscriviamo:}$$

$$F_{x-visc} = h \cdot dV \cdot \nabla^2 u \quad (1.8)$$

Effettuando ora gli stessi ragionamenti per una valutazione di F_{y-visc} e di F_{z-visc} , si ottiene, ovviamente ($\mathbf{v} = (u, v, w)$):

$$F_{y-visc} = h \cdot dV \cdot \nabla^2 v \quad (1.9)$$

$$F_{z-visc} = h \cdot dV \cdot \nabla^2 w \quad (1.10)$$

da cui, finalmente, componendo le (1.8), (1.9), e (1.10), si ha:

$$\mathbf{F}_{visc} = F_{x-visc} \hat{x} + F_{y-visc} \hat{y} + F_{z-visc} \hat{z} = h \cdot dV [\hat{x} \nabla^2 u + \hat{y} \nabla^2 v + \hat{z} \nabla^2 w] = h \cdot dV \cdot \nabla^2 \mathbf{v} \text{ che riscriviamo:}$$

$$\mathbf{F}_{visc} = h \cdot dV \cdot \nabla^2 \mathbf{v} \quad (1.11)$$

Ora, questa \mathbf{F}_{visc} va usata nella (1.2), dopo averla divisa per r e per dV (cioè per $M = r \cdot dV$), in quanto i membri della (1.2) hanno appunto le dimensioni di una forza diviso una massa, dunque:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{v} + \frac{1}{2} \nabla v^2 = -\frac{\nabla p}{r} - \frac{\mathbf{r}}{r} f + \frac{h}{r} \cdot \nabla^2 \mathbf{v} \quad (1.12)$$

e cioè, finalmente, la **Equazione di Navier-Stokes**, che riscriviamo:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{v} + \frac{1}{2} \nabla v^2 = -\frac{\nabla p}{r} - \frac{\mathbf{r}}{r} f + \frac{h}{r} \cdot \nabla^2 \mathbf{v}$$

$\frac{\mathbf{F}}{M} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \dots$ Accelerazione generale
 Forze di pressione
 Forze di gravità
 Forze viscosi

Appendici:

Appendice 1) Caso molto più raro di fluidi comprimibili:

per essi, cioè, $r \neq const$, $\gg \frac{\partial r}{\partial t} \neq 0$, $\gg \nabla(r\mathbf{v}) \neq 0$, e alla (1.12) va aggiunto il seguente termine: $+\frac{(h+h')}{r} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{r})$, ma la (1.12) abbraccia già una grandissima quantità di situazioni...

Appendice 2) Teorema della Divergenza (dimostrazione pratica):

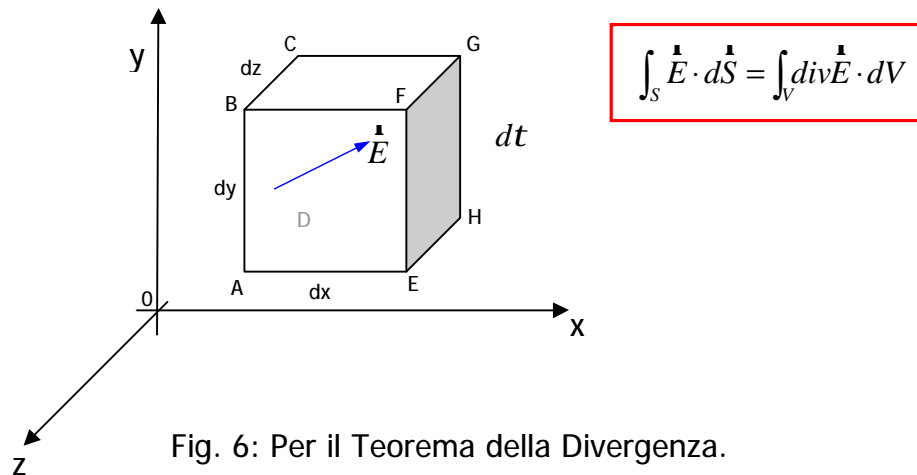


Fig. 6: Per il Teorema della Divergenza.

Denominiamo f il flusso del vettore \mathbf{E} ; si ha:

$$df_{ABCD} = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = -E_x(x, \bar{y}, \bar{z}) dydz \quad (\bar{y} \text{ significa } y \text{ medio})$$

$$df_{EFGH} = E_x(x+dx, \bar{y}, \bar{z}) dydz, \text{ ma si ha anche che, ovviamente (come sviluppo):}$$

$$E_x(x+dx, \bar{y}, \bar{z}) = E_x(x, \bar{y}, \bar{z}) + \frac{\partial E_x(x, \bar{y}, \bar{z})}{\partial x} dx \text{ da cui:}$$

$$df_{EFGH} = E_x(x, \bar{y}, \bar{z}) dydz + \frac{\partial E_x(x, \bar{y}, \bar{z})}{\partial x} dx dydz \text{ e dunque:}$$

$$df_{ABCD} + df_{EFGH} = \frac{\partial E_x}{\partial x} dV. \text{ Si agisce poi con analogia sugli altri assi } y \text{ e } z:$$

$$df_{AEHD} + df_{BCGF} = \frac{\partial E_y}{\partial y} dV$$

$$df_{ABFE} + df_{CGHD} = \frac{\partial E_z}{\partial z} dV$$

e si sommano tali flussi trovati, ottenendo, in totale:

$$df = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) dV = (\text{div} \cdot \mathbf{E}) dV = (\nabla \cdot \mathbf{E}) dV \text{ e dunque:}$$

$$f_s(\mathbf{E}) = \int_f df = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \text{div} \mathbf{E} \cdot dV = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{E}) \cdot dV \text{ e cioè l'asserto.}$$

Appendice 3) Teorema del Rotore o di Stokes (dimostrazione pratica-by Rubino!):

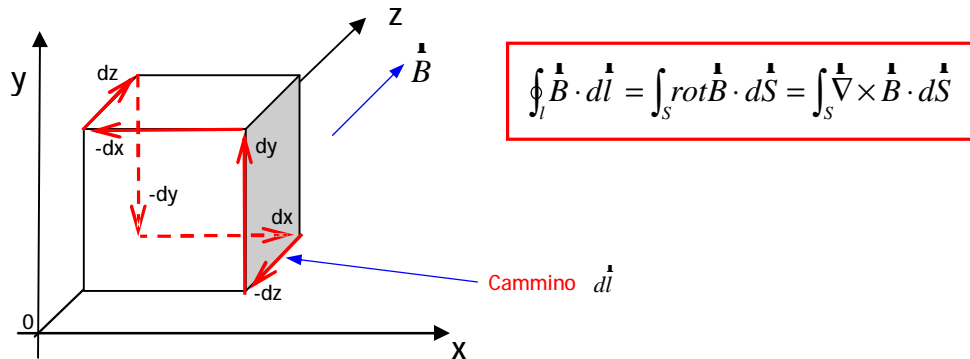


Fig. 7: Per il Teorema del Rotore (dim. by Rubino).

Valutiamo $\vec{B} \cdot d\vec{l}$:

Su dz B vale B_z ; su dx B vale B_x ; su dy B vale B_y ;

su -dz B vale $B_z + \frac{\partial B_z}{\partial x} dx - \frac{\partial B_z}{\partial y} dy$, per lo sviluppo di Taylor in 3D ed anche per il fatto che per arrivare dal centro di dz e quello di -dz si sale su x, si scende su y e nulla lungo z stesso.

Analogamente, su -dx B vale $B_x - \frac{\partial B_x}{\partial z} dz + \frac{\partial B_x}{\partial y} dy$ e su -dy B vale $B_y - \frac{\partial B_y}{\partial x} dx + \frac{\partial B_y}{\partial z} dz$.

Sommando tutti i contributi:

$$\begin{aligned} \vec{B} \cdot d\vec{l} &= B_z dz - \left(B_z + \frac{\partial B_z}{\partial x} dx - \frac{\partial B_z}{\partial y} dy \right) dz + B_x dx - \left(B_x - \frac{\partial B_x}{\partial z} dz + \frac{\partial B_x}{\partial y} dy \right) dx + B_y dy - \\ &+ \left(B_y - \frac{\partial B_y}{\partial x} dx + \frac{\partial B_y}{\partial z} dz \right) dy = \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) dx dz + \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) dx dy = \\ &= \text{rot} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \vec{\nabla} \times \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad \text{dove qui } d\vec{S} \text{ ha componenti } [\hat{x}(dydz), \hat{y}(dxdz), \hat{z}(dxdy)] \end{aligned}$$

e cioè l'asserto: $\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{\nabla} \times \vec{B} \cdot d\vec{S}$, dopo aver ricordato che:

$$\text{rot} \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} .$$

Appendice 4) L'Equazione di Bernoulli: $\frac{1}{2}rv^2 + p + rgz = 0$

Se ci troviamo in uno stato stazionario, dove $\dot{v} \neq f(t) \gg \frac{\partial \dot{v}}{\partial t} = 0$, poi $r = const$, e dove non si hanno forze viscosse, la Equazione di Navier-Stokes si riduce sicuramente a quella di Eulero (completata però della componente gravitazionale):

$\frac{\partial \dot{\mathbf{v}}}{\partial t} + (\dot{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \dot{\mathbf{v}} = -\frac{\nabla p}{r} - \dot{\mathbf{g}}$, e, anzi, visto che, come dicevamo, $\frac{\partial \dot{v}}{\partial t} = 0$, si ha:

$$(\dot{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \dot{\mathbf{v}} = -\frac{\nabla p}{r} - \dot{\mathbf{g}}. \quad (1.13)$$

Se ora consideriamo la divergenza e il gradiente in termini di derivata direzionale, in direzione \dot{dl} , nella fattispecie, allora si ha, nella (1.13): $\frac{dv}{dl}$ in luogo di $\dot{\mathbf{v}} \cdot \dot{\mathbf{v}}$, e $\frac{dp}{dl}$ in luogo di ∇p e poi, sempre nella (1.13), l'accelerazione di gravità $\dot{\mathbf{g}}$ (che si esercita lungo z, verso il basso) va proiettata lungo \dot{dl} ($\frac{dz}{dl}$ è il relativo coseno direttore), e dunque la (1.13) diventa:

$v \frac{dv}{dl} = -\frac{1}{r} \frac{dp}{dl} - g \frac{dz}{dl}$, da cui: $v dv + \frac{1}{r} dp + g dz = 0$ ed effettuando l'integrazione di quest'ultima:

$\frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{r} + gz = 0$, e moltiplicando tutto per la densità r , si ottiene: $\frac{1}{2}rv^2 + p + rgz = 0$
e cioè proprio l'asserto!

Bibliografia:

- 1) (C. Mencuccini e S. Silvestrini) FISICA I - Meccanica Termodinamica, Liguori.
 - 2) (Y. Nakayama) INTRODUCTION TO FLUID MECHANICS - Butterworth Heinemann.
 - 3) (L. D. Landau & E. M. Lifshitz) FLUID MECHANICS - Pergamon Press.
 - 4) ME 563 - INTERMEDIATE FLUID DYNAMICS (Lectures).
 - 5) (R. Feynman) LA FISICA DI FEYNMAN II - Zanichelli.
-



THE NAVIER-STOKES EQUATION:

The Queen of Fluid Dynamics.

A proof simple, but complete.

by Leonardo Rubino

September 2010 – Rev. 00

The Navier-Stokes Equation in the case of an incompressible fluid, that is $r = \text{const}$ and $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$:

(this situation is about most of practical cases)

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{r}) + \frac{1}{2} \nabla v^2 \right] = -\nabla p - \rho \nabla f + \eta \nabla^2 \mathbf{v} \quad \text{where} \quad \nabla = \nabla \times \mathbf{v} \quad (\text{vorticity}), \quad \eta \quad (\text{viscosity}),$$

f (gravitational potential), ρ (density), \mathbf{v} (velocity), t (time).

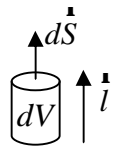
Proof:

-Let's start from the Continuity Equation $\frac{\partial r}{\partial t} + \nabla \cdot (r \mathbf{v}) = 0$, and we prove it:

$r \mathbf{v} = \mathbf{j}$ is the mass current density $[\frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \text{s}}]$ (dimensionally obvious)

$M = \int_V r \cdot dV$ (held obvious)

We have: $\frac{\partial}{\partial t} M = \frac{\partial}{\partial t} \int_V r \cdot dV = \int_V \frac{\partial r}{\partial t} \cdot dV = - \int_S r \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$, in fact, in terms of dimensions:



$dV = l \cdot dS$ and so $\frac{\partial}{\partial t} dV = dS \frac{\partial l}{\partial t} = dS \cdot \mathbf{v}$ and sign – is in case of “escaping” mass.

So: $\int_V \frac{\partial r}{\partial t} dV = - \int_S (r \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{S} = - \int_V \nabla \cdot (r \mathbf{v}) \cdot dV$, after having used the Divergence Theorem in the last equality.

Therefore: $\int_V \left[\frac{\partial r}{\partial t} + \nabla \cdot (r \mathbf{v}) \right] dV = 0$, from which we get the Continuity Equation.

-and let's also start from the Euler's Equation $(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{r})$, and we also prove this:

(p is the pressure; moreover, this equation is a sketch of the Navier-Stokes Equation, whereas we're not yet taking into account the gravitational field and the viscous forces)

The force acting on a small fluid volume dV is $d\mathbf{f} = -p \cdot d\mathbf{S}$, with sign -, as we are dealing with a force towards the small volume. Moreover:

$\mathbf{f} = -\int_S p \cdot d\mathbf{S} = -\int_V \nabla p \cdot dV$, after having used a dual of the Divergence theorem (a Green's formula), to go from the surface integral to the volume one.

We also have: $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial V} = \frac{\partial}{\partial V} [-\int_V \nabla p \cdot dV] = -\nabla p$, but, in terms of dimensions, it's simultaneously true that:

$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial V} = \frac{d}{dV} [M \frac{d\mathbf{v}}{dt}] = \frac{dM}{dV} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = r \frac{d\mathbf{v}}{dt}$ and from these two equations, we have:

$$r \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p. \tag{1.1}$$

Now we remind that: $d\mathbf{l} = (dx, dy, dz)$, $\nabla = (\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dz})$ and $\mathbf{v} = (\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt})$, so we can

easily write that:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

... ∇ \mathbf{v} ...

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{r} \text{ that is the Euler's Equation, indeed.}$$

Now, the terms of this Euler's Equation have the dimension of an acceleration $\frac{a}{s}$; so, if we want to take into account the gravitational field, too, on the right side we can algebraically add the gravitational acceleration \mathbf{g} , with a negative sign, as it's downwards.

But we know that the gradient of the potential f is really \mathbf{g} ($\nabla f = \mathbf{g}$), so:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{r} - \nabla f. \text{ As the following vectorial identity is in force:}$$

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} + \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}), \text{ and if we take the expression for the vorticity, on page 1,}$$

($\mathbf{\Omega} = \nabla \times \mathbf{v}$), we have:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{v} + \frac{1}{2} \nabla v^2 = -\frac{\nabla p}{r} - \nabla f \text{ and, so far, we have also taken into account the}$$

gravitational field.

In the most general case where we have to do with a viscous fluid , we'll also add a viscous force component:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{v} + \frac{1}{2} \nabla v^2 = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla f + \frac{\mathbf{f}_{visc}}{\rho} \quad (1.2)$$

whereas \mathbf{f}_{visc} is divided by the density because of the dimension compatibility with other terms in that equation.

(1.2) is already the Navier-Stokes Equation, whereas the viscous force \mathbf{f}_{visc} is still to be evaluated.

We will evaluate \mathbf{f}_{visc} in the case of incompressible fluids, that is fluids with $\rho = const$, $\gg \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ so, for the Continuity Equations, $\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$, $\gg \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$.

Calculation of \mathbf{f}_{visc} :

VISCOSITY:

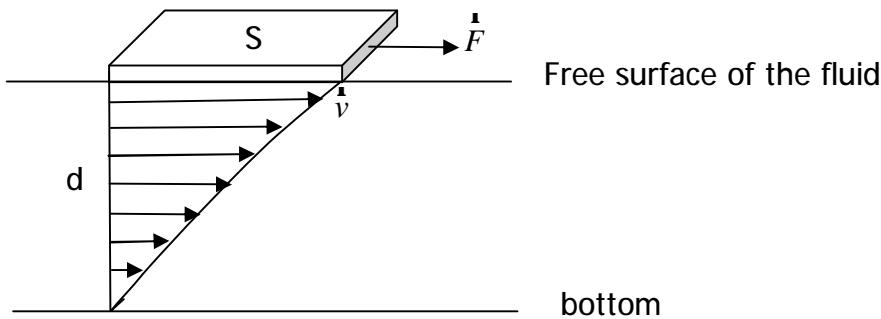


Fig. 1.

We know from general physics that: $\frac{\mathbf{F}}{S} = h \frac{\mathbf{v}}{d}$, (1.3)

That is, in order to drag the slab whose base surface is S , over the fluid, at a d distance from the bottom, and drag it at a \mathbf{v} speed, we need a force \mathbf{F}

Now, let's write down (1.3) in a differential form, for stresses \mathbf{t} and for components: (x)

$$t_x = \frac{F_x}{S} = h \frac{\partial u}{\partial y} \quad , \quad \text{having set } \mathbf{v} = (u, v, w) \quad , \quad \text{and so:}$$

$$F_x = h \frac{\partial u}{\partial y} \cdot S \quad (1.4)$$

We now use (1.4) on a small fluid volume dV in Fig. 2:

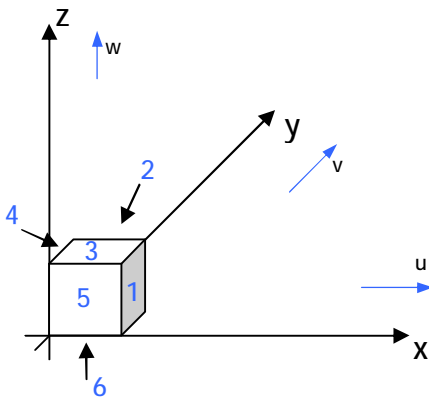


Fig. 2: Small volume of fluid dV .

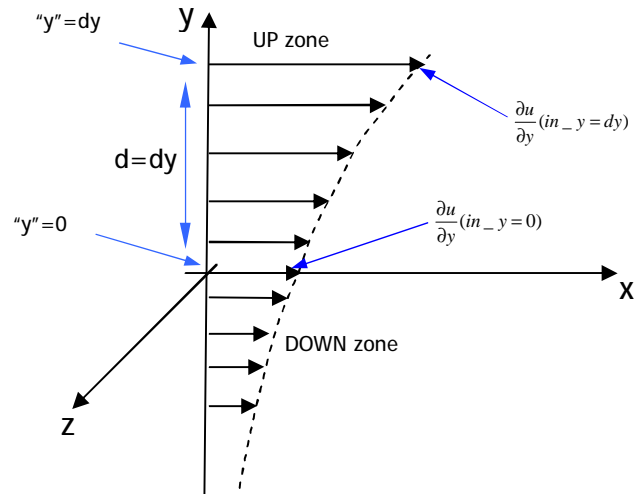


Fig. 3: Axis y , faces 2 and 5.

In Fig. 3 we have reproduced what shown in Fig. 1, but in a three-dimension context.

Faces 2 and 5:

so, with reference to Fig. 3, let's figure out the viscous forces (due to variations of u) on faces 2 and 5 of the small volume, that is those we meet when moving along the y axis, by using (1.4):

Viscous shear stress on face 2 $= +h \left[\frac{\partial u}{\partial y} (in_y = dy) \right] dx dz$

$\frac{1}{d} in_{(1.3)}$ $S_{in_{(1.3)}}$

This force acting on face 2 is positive (+) because the fluid over the point where it's figured out (UP zone) has got a higher speed (longer horizontal arrows) which drags S along the positive x .

On face 5, on the contrary, we'll have a (-) negative sign, because the fluid under such S surface has got a lower speed (down) and want to be dragged, so making a resistance, that is a negative force:

Viscous shear stress on face 5 $= -h \left[\frac{\partial u}{\partial y} (in_y = 0) \right] dx dz$

The resultant on x is the difference between the two equations, or better, the algebraic sum:

$$F_{x(y)} = h \left[\frac{\partial u}{\partial y} (y = dy) - \frac{\partial u}{\partial y} (y = 0) \right] dx dz = h \frac{\left[\frac{\partial u}{\partial y} (y = dy) - \frac{\partial u}{\partial y} (y = 0) \right]}{dy} dx dy dz = h \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dV, \quad \text{after}$$

having multiplied numerator and denominator by dy . Therefore:

$$F_{x(y)} = h \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dV \quad (\text{viscous force on } x \text{ due to variations of } u \text{ along } y) \quad (1.5)$$

Faces 3 and 6:

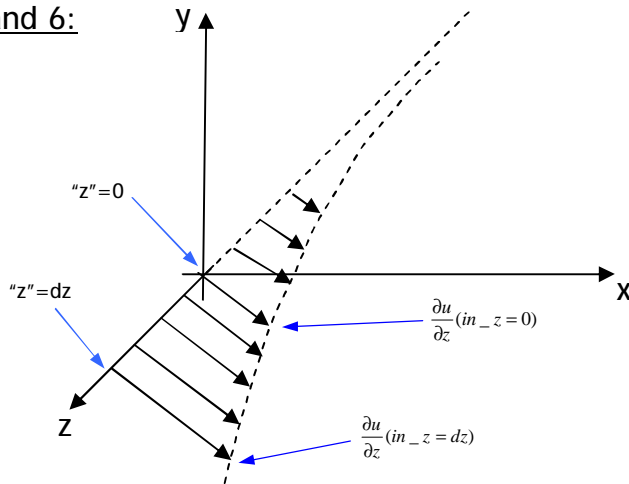


Fig. 4: Axis z, faces 3 and 6.

Similarly to the previous case, we have, as a result:

$$F_{x(z)} = h \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dV \quad (\text{viscous force on } x \text{ due to variation of } u \text{ along } z) \quad (1.6)$$

Faces 1 and 4:

For what case $F_{x(x)}$ is concerned, that is the viscous force on x due to variations of u (which is a component on x) along x itself, we will not talk about shear stresses, as, in such a case, the relevant force is still about x, but acts on $S=dydz$, which is orthogonal to x; so, it's about a NORMAL force, a tensile/compression one, and we refer to Fig. 5 below:

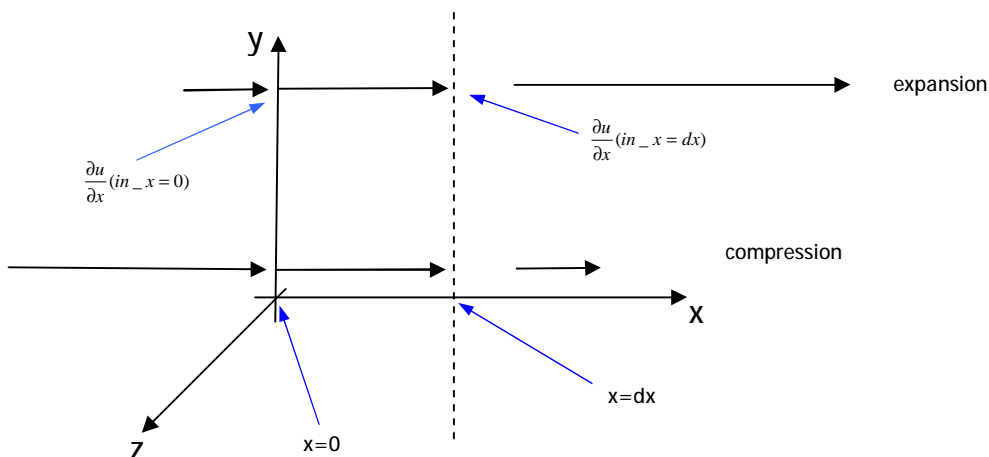


Fig. 5: Axis x, faces 1 and 4.

Anyway, nothing changes with numbers, with respect to previous cases, and we have:

$$F_{x(x)} = h \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dV \quad (\text{viscous force on } x \text{ due to variations of } u \text{ along } x \text{ itself}) \quad (1.7)$$

Now that we have three components of the viscous forces acting along x (that is those due to variations of the u component (comp. x) of speed \mathbf{v} , with respect to y, z and x itself), let's sum them up and get F_{x-visc} :

$$F_{x-visc} = h \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dV + h \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dV + h \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dV = h \cdot dV \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = h \cdot dV \cdot \nabla^2 u, \text{ and we rewrite}$$

it below:

$$F_{x-visc} = h \cdot dV \cdot \nabla^2 u \quad (1.8)$$

Now we carry out the same reasonings for an evaluation of F_{y-visc} and of F_{z-visc} , and obviously get ($\mathbf{v} = (u, v, w)$):

$$F_{y-visc} = h \cdot dV \cdot \nabla^2 v \quad (1.9)$$

$$F_{z-visc} = h \cdot dV \cdot \nabla^2 w \quad (1.10)$$

from which, finally, by adding (1.8), (1.9), and (1.10), we have:

$$\mathbf{F}_{visc} = F_{x-visc} \hat{x} + F_{y-visc} \hat{y} + F_{z-visc} \hat{z} = h \cdot dV [\hat{x} \nabla^2 u + \hat{y} \nabla^2 v + \hat{z} \nabla^2 w] = h \cdot dV \cdot \nabla^2 \mathbf{v} \text{ che riscriviamo:}$$

$$\mathbf{F}_{visc} = h \cdot dV \cdot \nabla^2 \mathbf{v} \quad (1.11)$$

Now, such a \mathbf{F}_{visc} must be used in (1.2), after having divided it by r and by dV (that is, for $M = r \cdot dV$), as both sides of (1.2) have got the dimension of a force per a mass, indie, so:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{v} + \frac{1}{2} \nabla v^2 = -\frac{\nabla p}{r} - \frac{\mathbf{r}}{r} f + \frac{h}{r} \cdot \nabla^2 \mathbf{v} \quad (1.12)$$

And therefore, finally, the **Navier-Stokes Equation**, and we write it better again:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{v} + \frac{1}{2} \nabla v^2 = -\frac{\nabla p}{r} - \frac{\mathbf{r}}{r} f + \frac{h}{r} \cdot \nabla^2 \mathbf{v}$$

$\frac{\mathbf{F}}{M} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \dots$ General acceleration
 Pressure forces
 Gravity forces
 Viscous forces

Appendixes:

Appendix 1) Compressible fluids – very rare cases:

for those cases, $r \neq const$, $\gg \frac{\partial r}{\partial t} \neq 0$, $\gg \nabla \cdot (r\mathbf{v}) \neq 0$, and to (1.12) we have to add the following term: $+\frac{(h+h')}{r} \nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{r})$, but (1.12) already enclose a big series of practical cases...

Appendix 2) Divergence Theorem (practical proof):

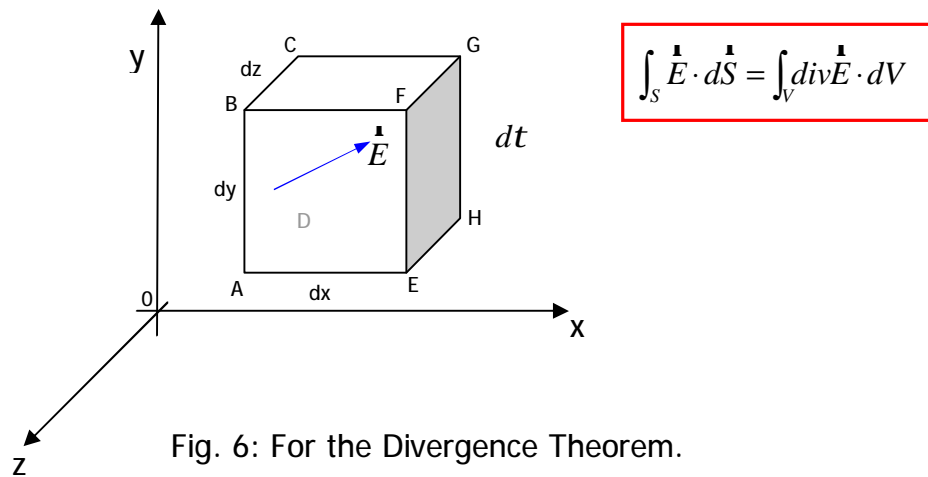


Fig. 6: For the Divergence Theorem.

Name f the flux of the vector \mathbf{E} ; we have:

$$df_{ABCD} = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = -E_x(x, \bar{y}, \bar{z}) dydz \quad (\bar{y} \text{ means } y \text{ "mean"})$$

$$df_{EFGH} = E_x(x+dx, \bar{y}, \bar{z}) dydz, \text{ but we obviously know that also: (as a development):}$$

$$E_x(x+dx, \bar{y}, \bar{z}) = E_x(x, \bar{y}, \bar{z}) + \frac{\partial E_x(x, \bar{y}, \bar{z})}{\partial x} dx \text{ so:}$$

$$df_{EFGH} = E_x(x, \bar{y}, \bar{z}) dydz + \frac{\partial E_x(x, \bar{y}, \bar{z})}{\partial x} dx dydz \text{ and so:}$$

$$df_{ABCD} + df_{EFGH} = \frac{\partial E_x}{\partial x} dV. \text{ We similarly act on axes } y \text{ and } z:$$

$$df_{AEHD} + df_{BCGF} = \frac{\partial E_y}{\partial y} dV$$

$$df_{ABFE} + df_{CGHD} = \frac{\partial E_z}{\partial z} dV$$

And then we sum up the fluxes so found, having totally:

$$df = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) dV = (\text{div} \cdot \mathbf{E}) dV = (\nabla \cdot \mathbf{E}) dV \text{ therefore:}$$

$$f_s(\mathbf{E}) = \int_f df = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \text{div} \mathbf{E} \cdot dV = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{E}) \cdot dV \text{ that is the statement.}$$

Appendix 3) Rotor or di Stokes' Theorem (practical proof-by Rubino!):

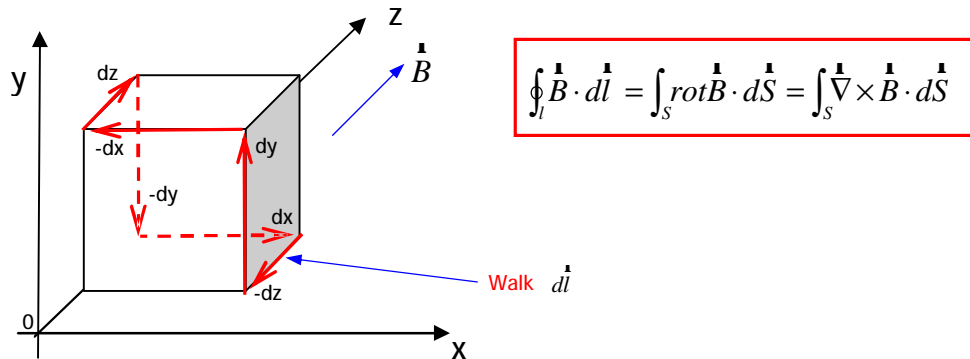


Fig. 7: For the Rotor Theorem (proof by Rubino).

Let's figure out $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$:

On dz B is B_z ; on dx B is B_x ; on dy B is B_y ;

on $-dz$ B is $B_z + \frac{\partial B_z}{\partial x} dx - \frac{\partial B_z}{\partial y} dy$, for 3-D Taylor's development and also because to go from the center of dz to that of $-dz$ we go up along x , then we go down along y and nothing along z itself.

Similarly, on $-dx$ B is $B_x - \frac{\partial B_x}{\partial z} dz + \frac{\partial B_x}{\partial y} dy$ and on $-dy$ B is $B_y - \frac{\partial B_y}{\partial x} dx + \frac{\partial B_y}{\partial z} dz$.

By summing up all contributions:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= B_z dz - (B_z + \frac{\partial B_z}{\partial x} dx - \frac{\partial B_z}{\partial y} dy) dz + B_x dx - (B_x - \frac{\partial B_x}{\partial z} dz + \frac{\partial B_x}{\partial y} dy) dx + B_y dy - \\ &+ (B_y - \frac{\partial B_y}{\partial x} dx + \frac{\partial B_y}{\partial z} dz) dy = (\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}) dy dz + (\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}) dx dz + (\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}) dx dy = \\ &= \mathbf{rot} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{\nabla} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad \text{whereas here } d\mathbf{S} \text{ has got components } [\hat{x}(dydz), \hat{y}(dxdz), \hat{z}(dxdy)] \end{aligned}$$

that is, the statement: $\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{rot} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{\nabla} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$, after having reminded of:

$$\mathbf{rot} \mathbf{B} = \mathbf{\nabla} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} .$$

Appendix 4) The Bernoulli's Equations: $\frac{1}{2}rv^2 + p + rgz = 0$

If we are in a stationary situation, whereas $\dot{v} \neq f(t) \gg \frac{\partial \dot{v}}{\partial t} = 0$, and then $r = const$, and where there's no viscous forces, the Navier-Stokes Equation for sure reduce to the Euler's one (but added with the gravitational component):

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{r} - \mathbf{g}, \text{ and, better, as we said that } \frac{\partial \dot{v}}{\partial t} = 0, \text{ we have:}$$

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{r} - \mathbf{g}. \tag{1.13}$$

If now we consider the divergence and the gradient in terms of directional derivative, on direction \dot{dl} , specifically, then we have in (1.13): $\frac{dv}{dl}$ instead of $\dot{\nabla} \cdot \mathbf{v}$, and $\frac{dp}{dl}$ instead of $\dot{\nabla} p$ and then, still in (1.13), the gravitational acceleration \dot{g} (which exerts along z, downwards) must be projected along \dot{dl} ($\frac{dz}{dl}$ is the relevant direction cosine), and so (1.13) becomes:

$$v \frac{dv}{dl} = -\frac{1}{r} \frac{dp}{dl} - g \frac{dz}{dl}, \text{ from which: } v dv + \frac{1}{r} dp + g dz = 0 \text{ and by integrating it:}$$

$$\frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{r} + gz = 0, \text{ and by multiplying by the density } r, \text{ we get: } \frac{1}{2}rv^2 + p + rgz = 0$$

that is, really the statement!

Bibliography:

- 1) (C. Mencuccini and S. Silvestrini) FISICA I - Meccanica Termodinamica, Liguori.
- 2) (Y. Nakayama) INTRODUCTION TO FLUID MECHANICS - Butterworth Heinemann.
- 3) (L. D. Landau & E. M. Lifshitz) FLUID MECHANICS - Pergamon Press.
- 4) ME 563 - INTERMEDIATE FLUID DYNAMICS (Lectures).
- 5) (R. Feynman) THE FEYNMAN PHYSICS II – Zanichelli.
